Läromedlets funktion i matematikklassrummet

En jämförelse av läromedel med fokus på området addition och subtraktion i årskurs 1

Av: Christine Klövholm & Khadija Morabet

Handledare: Natalia Karlsson
Södertörns högskola | Lärarutbildningen
Självständigt arbete (Examensarbete) 15 hp
Självständigt arbete 1 | HT23
Grundlärarutbildning med interkulturell profil med inriktning mot förskoleklass och årskurs 1-3, 240 hp

SÖDERTÖRNS HÖGSKOLA | STOCKHOLM
sh.se

Abstract

English summary

Title: *The role of textbook in the mathematics classroom - A comparison of textbooks focusing on the area of addition and subtraction in grade 1*

Keywords: textbooks, mathematics-specific concepts, representation forms, counting methods

The aim of this empirical study is to investigate what conditions are given for conceptual understanding in addition and subtraction in mathematics textbooks in grade 1, primary school. Methods used in this study are content analysis of four mathematics textbooks in grade 1, interviews, and digital questionnaires forms. The results show that conditions exist in all mathematics teaching textbooks to varying degrees and with some variation in representation forms and counting methods. The conclusion is that it is the teacher who is crucial for how textbooks fulfill their function and potential in relation to the learning criteria in the curriculum in mathematics.

Svensk sammanfattning

Titel: *Läromedlets funktion i matematikklassrummet – En jämförelse av läromedel med fokus på området addition och subtraktion i årskurs 1*

Nyckelord: läromedel, matematikspecifika begrepp, representationsformer, räknemetoder

Syftet med denna empiriska studie är att undersöka vilka förutsättningar som ges för elevers begreppsförståelse i läromedel inom addition och subtraktion i årskurs 1. Metoder som använts för att sammanställa resultatet skedde via en innehållsanalys av fyra matematikläromedel, muntliga intervjuer med lärare och enkätformulär. Resultatet från studien visar att det finns förutsättningar i samtliga matematikläromedel, men att de ges i olika utsträckningar och med viss variation inom områdena representationsformer och räknemetoder. Slutsatsen är att läraren är avgörande för hur läromedlet fyller sin funktion samt potential i förhållande till de kunskapsmålen som finns i kursplanen inom matematik.

Innehållsförteckning

1 Introduktion

Denna uppsats handlar om de förutsättningar som ges i matematikläromedel för att bygga upp elevers matematiska språk och förståelse för ämnets terminologi. Studien behandlar även lärarens undervisning i förhållande till innehållet i läromedlen. Detta kapitel innefattar en inledning, bakgrund, definitionslista över centrala begrepp och studiens syfte och frågeställning.

1.1 Inledning

Skolan har många mål med undervisningen. Några av målen är på samhällsnivå, andra på klassrumsnivå. En del mål är kortsiktiga och knyter an till elevernas vardag för ett meningsfullt lärande här och nu, medan andra mål är långsiktiga och avser förbereda eleverna inför sitt vuxna liv. Ett av skolans många mål är att elever ska utveckla kunskaper i och förmågor inom matematikämnet. Matematik är ett ämne som många gånger uppfattas som abstrakt eftersom det har egna uttrycksformer som matematikspecifika begrepp, siffror och symboler. Stina Olén (2016) skriver i en rapport att många elever har uppfattningen om att matematikförmåga och kompetens är något som man antingen har eller inte har. Denna felaktiga uppfattning behöver förebyggas vid skolstarten där matematiska idéer och matematisk terminologi introduceras genom att kommunicera och ge utrymme för elevernas tänkande och deltagande inom matematik. Likt undervisning i andra ämnen kräver matematik en förståelse för den ämnesspecifika terminologin som ämnet innefattar, men det som gör matematik unikt är de olika representationsformerna som ingår. För en framgångsrik matematikutveckling krävs en grundläggande förståelse för matematiska koncept som utgörs av generella idéer och principer. Koncepten är grundläggande då de är nödvändiga för en holistisk förståelse av matematiska samband. Denna förståelse behöver läggas i skolans tidigare år eftersom den utgör en grund i elevernas skolgång. Olén (2016, s. 3) lyfter också fram att vuxnas inställning till matematik kan vara en faktor som påverkar elevernas uppfattning.

1.2 Bakgrund

Globaliseringen har möjliggjort samarbete och kommunikation mellan människor oberoende av var i världen de befinner sig. Matematik är ett viktigt kommunikationsverktyg som används universellt. Det kan vara i kommunikation av statistik, prognoser eller programmering. Matematik används inom samhälls- och ekonomiplanering, men även inom forskning och teknologins utveckling. Den teknologiska utvecklingen sker i realtid vilket innebär ett högre krav på människors matematiska kompetens. I de flesta vardagssituationer möter vi på texter och symboler som vi läser och tolkar. Matematikens unika symboler möjliggör exakta uträkningar som utgör en precision som inte går att uppnå utan matematiska koncept. Matematikens roll och matematisk kompetens är således avgörande i många situationer inom beslutsfattande på individ- och samhällelig nivå.

I Sverige avskaffades läromedelsgranskning år 1991 (Stridsman 2014). Det innebär att ansvar för kvalitetssäkringen av läromedel ligger på förlagen och hos läraren. En gemensam utgångspunkt för alla lärare i Sverige är nationella styrdokument vilka ska styra undervisningen utifrån kunskapsmål och kunskapskriterier. I *Läroplan för grundskola, förskoleklassen och fritidshemmet 2022* (Skolverket 2022b, s. 54) står det att matematiken är en aktivitet som kopplas till flera aspekter, samhälleliga och sociala som naturvetenskapliga, tekniska och den digitala utvecklingen. I Lgr 22 framkommer det att eleverna ska ges möjlighet att utveckla förmågan att kunna beskriva matematiska begrepp och förstå sambanden mellan de olika begreppen. Undervisningen ska också ge förutsättningar att utveckla förmågan vid val av lämpliga matematiska metoder och arbete med beräkningar (Skolverket 2022b, s. 55). Ämnet ska rusta eleverna inför de framtida val de ställs inför både i privata och professionella sammanhang. Ämnet ska även möjliggöra deltagandet i framtida samhälleliga beslutprocesser. I kursplanen för matematik inleds ämnets syfte enligt nedan:

> Undervisningen i ämnet matematik ska syfta till att eleverna utvecklar kunskaper om matematik och matematikens användning i vardagen och inom olika ämnesområden. Undervisningen ska bidra till att eleverna utvecklar intresse för matematik och tilltro till sin förmåga att använda matematik i olika sammanhang. (Skolverket 2022, s. 54)

I citatet ovan framgår ett tydligt syfte i ämnet och att eleverna ska få möjlighet att se matematiken relevans i vardagen. Citatet lyfter också fram vikten av elevernas förståelse för ämnet vilket är en förutsättning för att lyckas och utveckla tilltro till den egna förmågan. Matematikundervisningen går från helklassundervisning där läraren leder arbetet till enskilt arbete i läromedel. De läromedel som används i klassrummen har därför betydelse för elevernas färdighetsträning och förmågor. I Lgr 22 (Skolverket 2022b, s. 55) står det under *Centralt innehåll* att elever ska förstå, använda, välja, resonera och lösa matematiska problem av olika slag med hjälp av matematikens olika uttrycksformer. I slutet på årskurs 3 ska eleverna behärska grundläggande matematiska begrepp och även använda dessa på ett korrekt sätt. Eleverna ska kunna följa och föra matematiska resonemang vilket kräver förståelse för matematiskt språk

(Skolverket 2022b, s. 60). Det är av största vikt att eleverna får en förståelse för matematik och utvecklar matematiskt språk då matematik är en stor del av vardagen i allt från mått vid matlagning till den privata ekonomin, och inte minst för lyckade karriärmöjligheter. I Kommentarmaterialet till kursplanen i matematik (Skolverket 2022a, s. 12) står det att det matematiska innehållet ska representeras på ett varierande sätt med hjälp av visuella stöd, konkret material och symboler för olika tal för att stärka elevers förståelse för matematik och sambanden inom ämnet. Detta kopplas till vår studie och de aspekter som vi avser undersöka.

> Begreppsförståelsen har en central roll för elevernas förståelse av matematik och deras fortsatta kunskapsutveckling i ämnet. Begreppsförståelsen är också grundläggande för att eleverna ska utveckla sin förmåga att kommunicera om matematik. Undervisningen behöver därför ge eleverna erfarenheter av begrepp utifrån varierande situationer och sammanhang. (Skolverket 2022a, s. 6)

I citatet ovan betonas begreppsförståelsen. Vid introduktion av nya ord och begrepp behöver eleverna få något att hänga upp kunskapen på. Det är viktigt att de får koppla begreppet eller ordet till dess betydelse vilket kan ske med hjälp av en visuell bild som representerar begreppet.

Mot denna bakgrund anser vi att det är viktigt att elever får bygga upp ett matematiskt språk i början av skolstarten för en lyckad skolframgång i ämnet. Med denna studie avser vi bidra med kunskap om de förutsättningar som ges i läromedel och hur lärares undervisning förhåller sig till innehållet i sin undervisning. Med utgångspunkt i avskaffningen av läromedelsgranskning, Lgr 22 (Skolverket 2022b) och det ansvaret som ligger hon lärare har ämnesvalet en hög relevans då lärare själva väljer ut och anpassar läromedel efter sina elevgrupper. Läromedelsanalysen i denna studie är således värdefull för lärare, läromedelsutvecklare och inte minst för oss lärarstudenter i våra framtida uppdrag.

1.2.1 Centrala begrepp

I detta avsnitt definieras de centrala begreppen i studien. Begreppen definieras i huvudsak utifrån dess betydelse i studien, men har sin grund i definitioner i *Matematiktermer för skolan* av Kiselman och Mouwitz (2008) och Svenska Akademiens Ordlista (2023). Dessa begrepp förklaras mer utförligt under teorianknytning och tidigare forskning.

Läromedel definieras av SAOL (2023) som en skolbok. Det vill säga en resurs för lärandet, vilket i denna studie utgår från fyra olika matematikläromedel i årskurs 1 som i huvudsak behandlar räknesätten addition och subtraktion. Läromedel fungerar som arbetsböcker och övningsmaterial för elever.

Matematikspecifika begrepp definieras i denna studie som begrepp, symboler och matematisk terminologi relaterad till den språkliga aspekten som används inom addition och subtraktion. Dessa utgörs av bland annat begreppen *term*, *summa* och *differens*. Begreppen kan även fylla funktionen som tankeredskap för att underlätta elevers förståelse av inlärning av ämnet.

Medierande resurser syftar i denna studie på dels de hjälpmedel/verktyg som presenteras i läromedel i form av visuella stöd vilka underlättar elevers förståelse av matematiska begrepp, addition och subtraktion. Dels på de medierande resurser som lärare använder i sin undervisning och kan utgöras av laborativa material och genomgångar på tavlan där lärare exempelvis ritar för att förtydliga eller förklara en betydelse eller räknemetod.

Representationsformer definieras i denna studie som medierande verktyg som stödjer elevers lärande vid begreppsförståelse och olika räknemetoder. Verktygen består av visuella stöd som används i undervisningen och framställs som material och bilder med representation av siffror, symboler, tecken och skrift inom området addition och subtraktion. Representationsform kan även benämnas som semiotisk resurs.

Räknemetoder ingår i matematikens fyra räknesätt, vilket i denna studie avgränsas till addition och subtraktion. Räknemetoder kan vara räknelagar och -strategier för att lösa matematiska problem. De räknemetoder som nämns i denna studie är kommutativa lagen, associativa lagen, överslagsräkning, taluppdelning och öppna utsagor vilka förklaras närmare under teorier.

Scaffolding är ett centralt begrepp som används inom pedagogiken och inlärningsteorin. Begreppet handlar om den stöttning som lärare ger elever för att utveckla en självständighet i sitt lärande. På svenska kan scaffolding härledas till guidat lärande.

Tankeredskap inom matematikområdet är de verktyg som används för att underlätta och stödja matematiska tankeprocesser vid beräkningar och matematiska resonemang. Redskapen är till en början konkreta i form av yttre symboler och verktyg för att sedan användas som inre tankeredskap i en mer abstrakt tankeprocess.

Progression är hur svårighetsgraden utvecklas från en termin till en annan, vilket i läromedel synliggörs som högre talområden och nya ämnesspecifika begrepp.

1.3 Syfte & frågeställning

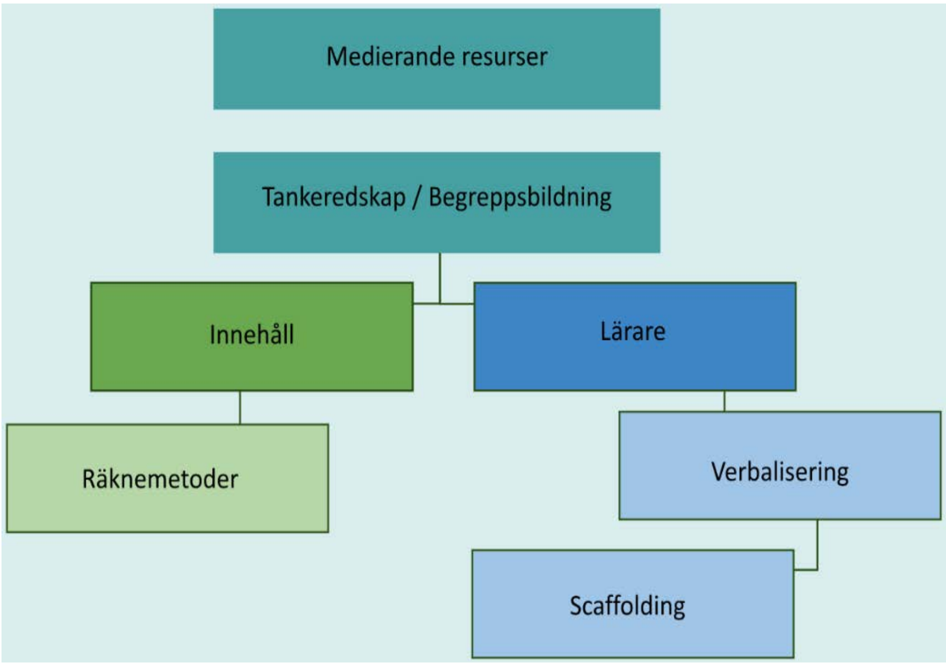
Matematik är ett språk som uttrycks genom symboler, formler, mönster, algoritmer, tal och skrift. En viktig faktor för att uttrycka matematik är att kunna kommunicera hur vi tänker, räknar och löser problem både till vardags och i skolsammanhang. Det är således avgörande att det sker en övergång mellan vardagsspråket och det ämnesspecifika språket för att en matematikutveckling ska ske. Syftet med denna studie är att i huvudsak undersöka om läromedel möjliggör utveckling av elevers begreppsförståelse inom de räknesätt som presenteras i matematikböcker i årskurs 1, med fokus på addition och subtraktion. I förhållande till läromedlen undersöks även hur lärare arbetar med matematikspecifika begrepp och representationsformer i klassrummet.

Följande frågeställningar ligger till grund för denna studie:

- Hur framställs matematikspecifika begrepp och representationsformer i läromedel inom området addition och subtraktion i årskurs 1?
- Hur arbetar lärare med matematikspecifika begrepp och representationsformer i förhållande till de läromedel som används inom området addition och subtraktion i årskurs 1?

2 Teorianknytning

I detta kapitel lyfts fem teorier fram (se figur 1), där *medierande resurser* och *tankeredskap/begreppsbildning* är två övergripande teorier. Dessa två teorier byggs vidare ut i två delar som utgör innehållet i läromedel och lärares undervisning i området addition och subtraktion. Dessa delar innefattar teorierna *räknemetoder*, *verbalisering* och *scaffolding*.



Figur 1: Teoretisk modell

2.1 Medierande resurser

Medierande resurser är sådant som används i matematikundervisningen för att underlätta inlärning av och förståelse för matematikämnet. Det kan vara hur läraren presenterar undervisningsinnehåll (matematikdidaktiska val), användning av språket (formuleringar med hjälp av ämnesdidaktiska begrepp), vilka verktyg som används i form av fysiskt material och visuella stöd. Exempel på hur undervisningsinnehållet presenteras med hjälp av språk och visuellt stöd kan vara att läraren ritar symboler eller föremål på tavlan och sedan har en genomgång med eleverna om vad som händer när man subtraherar genom att stryka över ett antal föremål. Lärare kan exempelvis använda medierande verktyg i form av räknekuber, klossar eller bönor för att underlätta elevernas förståelse för och inlärning av grundläggande algebra.

Enligt Kinard och Kozulin (2012) sker matematikutvecklingen med hjälp av dessa medierande resurser. Medierande resurser kan representeras i form av skriftliga representationer, symboler, texter och bilder och med hjälp av olika typer av artefakter som stöttar eleverna vidare i sin inlärning och utveckling. Resurserna framhålls i undervisningen av undervisande lärare som mänsklig mediator.

En mänsklig mediator står mellan undervisningsinnehållet och eleven, hen medlar kunskapen så att eleverna kan ta till sig den. Med utgångspunkt i studiens framställning avgränsas medieringen till symboliska redskap vilka är siffror och matematiska tecken som additionstecken, subtraktionstecken, likhetstecken och lärarens mediering (Kinard & Kozulin 2012, s. 53). Symbolerna kan även vara i form av subitisering vilket innebär en förmåga att kunna uppfatta ett antal föremål som grupp utan att behöva räkna dem, som att exempelvis uppfatta antalet 7, en hel hand och två fingrar som utgör $5 + 2$. När eleven har en inre bild av att 10 fingrar utgörs av två händer blir det också lättare att subtrahera $10 - 5$, och eleven kan med enkelhet "ta bort en hel hand" och den kvarstående handen symboliserar 5. Den inre tankeredskapen som i exemplet med händer underlättar huvudräkning vilket är det långsiktiga målet med tankeredskap inom matematik.

Medierande resurser i form av skriftliga representationer kan framhållas i matematikläromedel i form av siffror, matematiska tecken, bilder på föremål och inte minst språkligt för att mediera ett räknesätt, metod eller matematisk idé.

Fördelen med denna teori är att den innefattar flertalet medierande resurser inom matematikämnet vilket inrymmer lärares didaktik och interaktion, konkreta hjälpmedel och språk vilket ger en djupare förståelse för lärandeprocessen. Teorins ramverk rymmer även en läromedelsanalys och ger möjligheten att inkludera den mediering som erbjuds i läromedlen i form av text och bild. En nackdel med denna teori kan vara att alltför mycket fokus hamnar just på de medierande resurserna utan att bidra till en mer abstrakt tankeprocess, därför har vi valt kompletterande som teorier. Teorin är relevant för vår studie då vi avser undersöka hur matematiskt språk och terminologi framställs i läromedel och i undervisningen och hur detta görs med hjälp av visuella representationsformer vilket leder oss till nästa teori som handlar om representationer och begrepp.

2.2 Tankeredskap och begreppsbildning

Den andra övergripande teorin utgörs i grunden av två teorier, matematikspecifika tankeredskap och begreppsbildning. Matematikspecifika tankeredskap innebär de symboler och tecken som används inom matematik som siffror, +, – och =. Båda teorierna utgår från *Rigorous Mathematical Thinking,* (RMT-modellen) av Kinard och Kozulin (2012). Matematikspecifika tankeredskap ligger till grund för begreppsbildningen då tankeredskapen bidrar till utveckling av begreppen (Kinard & Kozulin 2012, s. 119). Tankeredskapet kan vara en symbol som sedan knyts an till en betydelse och ett begrepp. RMT-modellen handlar om tillämpning av tecken och symboler i undervisningen för att nå elevers djupare förståelse och effektiv användbarhet inom matematik. Tonvikten ligger på matematiska resonemang genom språk och de tankeredskap som elever behöver för en gynnsam matematikutveckling.

> The functionality of mathematical language as a cognitive process stems from the fact that this language, as it emerges in learners, progressively becomes the conceptual content of learners' thinking. It also becomes the operational medium for the expression of mathematical thought and conceptual understanding. Expressing mathematical thought is itself a domainspecific cognitive process. Moreover, the transformation of initial mathematical thought into a proper mathematical expression provides both the activity and content of learners' metacognition. (Kinard & Kozulin 2012, s. 117)

I stycket ovan skriver Kinard och Kozulin (2012) om det matematiska språkets funktion i en kognitiv tankeprocess och hur den utgör en del av den konceptuella förståelsen hos elever. Matematikspecifika tankeredskap handlar således om nödvändiga symboler och tecken som elever behöver för att utveckla förståelse för matematik. När elever lär sig dessa tankeredskap utvecklar de både matematiskt tänk, förmågor och färdigheter för att lösa olika sorters problem inom ämnet. Första steget är att eleverna lär sig externa symboler och tecken (symboliska redskap), som sedan internaliseras och blir en del av deras inre tankeprocess. Denna process bidrar även till ett inre system av kopplingar och samband på olika nivåer, vilket främjar och fördjupar deras förståelse av matematik och deras förmåga att använda en mer avancerad tankeprocess (Kinard & Kozulin 2012, ss. 117–118). Det finns tre olika nivåer; symboler och koder, talsystem och platsvärden samt kartesiska koordinater (Kinard & Kozulin 2012, s. 125). Studien kommer att avgränsas till symboler för kvantitativa samband och operationer som +, – och = (Kinard & Kozulin 2012, s. 121).

Kinard och Kozulin (2012, ss. 118–119) framställer språket som ett tankeredskap bestående av tecken, symboler, begrepp, formuleringar, benämningar, funktioner och strukturer. Språket är en uppbyggnad av tankeredskap som utgör tre faser i begreppsbildning. Dessa faser kallas *kognitiv utveckling*, *utveckling av innehållet som en process* och *kognitiv begreppsbildning* (Kinard & Kozulin 2012, ss. 35–39). Denna studie avgränsas till kognitiv begreppsbildning då syftet pekar på matematiskt språk och kopplingen mellan begrepp och betydelse med hjälp av representationer. För att eleverna ska utveckla sin begreppsbildning krävs lärarens vägledning och guidning vid inlärningen av tankeredskap.

Inom grundläggande algebra handlar begreppsbildning om att utveckla en förståelse för matematiska koncept inom addition och subtraktion. Det innebär att eleverna inte enbart ska lära sig memorera olika räkneregler, utan i stället fokusera på att förstå vad som sker när något adderas eller subtraheras, den inre processen. I vardagliga situationer kan eleverna exempelvis återknyta till att "plus" i addition är när något kombineras eller läggs till en mängd eller antal, medan "minus" i subtraktion är när något tas bort från en grupp. Konkreta material som exempelvis räknekuber, bilder och tabeller kan synliggöra olika räkneoperationer för elever och synnerhet för elever i lägre årskurser eller de som behöver extra stöd. Begreppsbildningen sker gradvis och bidrar till elevers förståelse och användning av tankemönster, då tonvikten bör ligga på matematiska resonemang och inte på den mekaniska metoden, vilket tyvärr dominerar i dagens undervisning (Kinard & Kozulin 2012, s. 117).

Matematikspecifika tankeredskap och begreppsbildning är relevanta teorier som i denna studie används som verktyg för att studera de möjligheter som ges i läromedel för utveckling av matematisk terminologi. Dessa är kompletterande och fördjupande teorier till medierande resurser då de specificerar vilka tankeredskap och begrepp som kan mediera matematiken, vilket har en direkt relevans till vårt syfte och frågeställningar. Teorierna kopplas både till representationsformerna och matematiskt språk inom läromedel och i lärarens undervisning. En fördel med teorierna är att de ger en förståelse för vilka förutsättningar som ges i läromedel i form av språk och bilder som underlättar förståelsen för dessa, men även för hur läraren använder sitt språk och material för att fördjupa elevernas förståelse. Begränsningar med teorin kan vara komplexiteten i den kognitiva aspekten då det är svårt att studera den inre tankeprocessen. Vår bedömning är dock att detta inte kommer innebära en risk då metodvalet inte innefattar observationer. Vi har skrivit om teorierna i tidigare empiriska studier inom matematik och är väl bekanta med dessa, vilket ger oss mer kunskap och medvetenhet i hur de ska använda i vår studie.

2.3 Matematikspecifika begrepp och läromedel

I denna studie har vi valt att använda den övergripande termen *räknemetod* som är en ämnesteori. Vi har valt att avgränsa oss till fem räknemetoder inom addition och subtraktion som utgörs av: *kommutativa lagen, associativa lagen, taluppdelning, öppna utsagor* och *överslagsräkning*. Centrala begrepp för addition och subtraktion är *term*, *summa* och *differens* som även framställs av Kiselman och Mouwitz (2008, ss. 25–26).

2.3.1 Kommutativa räknelagen och associativa räknelagen

Två centrala räknemetoder inom addition och multiplikation är *kommutativa räknelagen* och *associativa räknelagen*. Dessa lagar underlättar räkneoperationer i huvudräkning. Ett vardagligt uttryck inom addition är "plussa" när ett eller fler tal ska adderas till det andra, vilket tillsammans utgör summan av talen (Kiselman & Mouwitz 2008, s. 24). Karlsson och Kilborn (2015, s. 46) skriver att den *kommutativa lagen* innebär att det inte spelar någon roll vilken term som kommer först i beräkningen inom addition, eftersom summan är densamma. Räknelagen innebär: $a + b = b + a$. Vid högre talområden är det effektivare att placera den största termen först och räkna uppåt, där exempelvis $3 + 56$ omvandlas till $56 + 3$ (Karlsson & Kilborn 2015, s. 69). Den *associativa lagen* ingår även här i addition och är ett matematiskt uttryck med minst tre termer. Likt den kommutativa lagen kan termerna adderas i godtycklig ordning i den *associativa räknelag*, vilket innebär att $(a + b) + c$ är detsamma som $a + (b + c)$. Karlsson och Kilborn (2015, s. 62) framställer associativa lagen som ett sätt att gruppera och avrunda talen där man placerar de termer som bäst passar ihop intill varandra. Det ger eleverna förståelse för smartare val av räknemetod som effektiviserar huvudräkning. I högre talområden kan ett lämpligt mönster vara att finna tiokamrater som exempelvis $(5 + 33) + 7$ och i stället räkna $5 + (33 + 7)$.

2.3.2 Överslagsräkning, taluppdelning och öppna utsagor

Överslagsräkning, *taluppdelning* och *öppen utsaga* är räknemetoder som kan tillämpas för att belysa samband mellan addition och subtraktion, men även för att lösa olika räkneoperationer inom området. *Överslagsräkning* är en metod där tal avrundas till runda tal för att göra en rimlighetsbedömning (Kiselman & Mouwitz 2008, s. 24), exempelvis 77 och 22 kan avrundas till 80 och 20. En annan effektiv metod är *taluppdelning* som tillämpas genom att talet delas upp på olika sätt (Karlsson & Kilborn 2015, s. 36), vilket kan innebära att dela upp talet 10 i två grupper, exempelvis $9 + 1$, $8 + 2$ och $5 + 5$. I subtraktion används taluppdelning i stället för att belysa sambanden mellan $10 - 9 = 1$ och $10 - 1 = 9$. En tredje metod är att fylla i "luckor" i *öppna utsagor* (Karlsson & Kilborn 2015, s. 50), exempelvis i räkneoperationen $15 + \_ = 25$ eller $25 - \_ = 15$. Förståelse för symbolen likhetstecken [=] är avgörande vid uträkning av öppna utsagor. Förståelse för sambanden mellan de olika matematiska räknemetoderna är avgörande för att få en djupare förståelse av matematik. Förståelse för hur relationen mellan addition och subtraktion ser ut är betydande för att kunna lösa mer komplexa problem inom matematik som öppna utsagor. Kunskaper i de olika räknemetoderna ökar förmågan att kunna lösa problem av olika slag på ett korrekt och effektivt sätt.

Räknemetoderna och lagarna är viktiga att känna till och behärska för elevernas vidare utveckling inom matematikämnet då de både effektiviserar räkneoperationer och ger en förståelse för dem. Fördelen med räknemetoderna är att de ger ett tydligt ramverk för de fem metoder som ska studeras samt en förståelse för hur de framhålls i läromedel och hur lärare arbetar med dessa som ämnesteorier. Nackdelen med dessa ämnesteorier är att de är svåra att identifiera om de inte finns rubricerade och förklarade i läromedlen. Det innebär således att ansvaret ligger på läraren att lyfta fram och förklara de olika räknemetoderna. Däremot blir det tydligare att identifiera räknemetoderna i lärarens undervisning.

2.4 Lärares matematikundervisning

Lärarens matematikdidaktik är viktig för elevernas kunskapsinhämtning och utveckling av förmågor. Läraren modellerar för och stöttar eleverna i undervisningen både genom språket och i utformningen av undervisningsinnehållets upplägg och kunskapsnivå.

2.4.1 Verbalisering

Verbalisering är den process då elever får sätta ord och mening på sina matematiska tankar och resonemang, vilket utgör ett mycket viktigt steg i elevernas matematikutveckling. Eleverna får formulera, förklara och beskriva räkneoperationer och tankegångar vilket synliggör tankeprocessen, både för eleven själv och för läraren (Kinard & Kozulin 2012, s. 117). Lev Vygotskij (1999) skriver om verbalisering i form av samband mellan tanke och ord vilket inom matematiken är när eleverna eller läraren sätter ord på en matematisk tankegång. Tanken existerar inte utan ordet, och ordet existerar inte utan tanken. Sambandet mellan ord och tanke är beroende av varandra och utvecklas löpande i processer (Vygotskij 1999, s. 392). Intellektuella processer och språkligt tänkande utgör en helhet, verbalisering. Precis som matematiskt tänkande och matematiska språk och formuleringar fulländar varandra. Vygotskij (1999) skriver om verbaliseringens två aspekter, dels som språkligt fenomen, dels som psykologisk process. Ord eller begrepp har en språksida, sammansatta fonem (språkljud) som bildar ordet i talad form, som i sin tur är kopplad till en inre representation (betydelse) vilket motsvarar ett intellektuellt fenomen. Vygotskij (1999, s. 395) skriver att dessa två sidor bildar en enhet. Vidare lyfter författaren fram att förståelsen av dessa ord och begrepp inte är statisk vilket innebär att betydelsen av ett ord och begrepp kan ändras och byggas ut i vidare förbindelser. Associationen mellan betydelse och språkljud kan ses som ett dynamiskt förhållande och ordens betydelse och dess relation till tanken kan både förändras och utvecklas.

Verbaliseringsteorin fokuserar på hur tankar fulländas i ord och begrepp. Dels handlar det om vilka möjligheter elever ges för att koppla samman en betydelse (tanken) med ett begrepp, vilket kan ske när läraren modellerar och berättar hur en inre räkneprocess går till steg för steg. Det kan också vara i samband med att visa upp visuellt material och förklara ett begrepp, där eleverna får koppla samman den yttre symbolen eller föremålet med ett begrepp. Denna teori är viktig inom matematikdidaktiken och relevant för studien då vi avser undersöka förutsättningar för utveckling av det matematiska språket i läromedel och hur lärare medierar dessa. Det är först när man får prata om det man läst sig som kunskapen befäster sig.
Matematikämnet strävar efter att elever ska utveckla förmågan att verbalisera sina tankeprocesser då detta synliggör räkneoperationen och resonemangsförmåga vilket är en stor fördel med teorin. Det grundläggande matematiska idéerna bygger på att eleverna ska lära sig matematik som ett förhållningssätt för att kunna generalisera matematiska tankar inom området. Enligt vår reflektion kan det finnas en begränsning med teorin om det finns språkliga barriärer som beror på annat modersmål eller språkstörning.

2.4.2 Scaffolding

Scaffolding grundar sig på Vygotskijs teori om inlärning och handlar om den stöttning och vägledning som lärare ger elever. Begreppet syftar till en speciell typ av stöd som bidrar till att eleverna utvecklar färdigheter och förmågor som leder till självständighet. Inom matematiken avser scaffolding en förståelse för och kunskaper om matematiska handlingar. Bert van Oers (2014 s. 759) skriver i *Scaffolding in Mathematics Education* att scaffolding utgör samma stödsystem som en byggnadsställning i en byggkonstruktion, och att detta stöd kan individualiseras efter elevers kunskapsnivå och behov. Stöttningen är nödvändig och avgörande i början men ska vara tillfällig och minska vartefter elevernas färdigheter och förmågor utvecklas. Scaffolding möjliggör en progression från att göra uppgifter med lärarens vägledning och stöttning till att kunna göra uppgifter självständigt. Vidare skriver van Oers (2014, s. 760) att en viktig scaffolding strategi inom matematik är att läraren visar hur en räkneoperation utförs, modellerar, och ger elever återkoppling på hur de kan utveckla sina strategier. Lärarens roll är att styra och vägleda eleverna i matematiska samtal där eleverna ska få möjlighet till förståelse utifrån sina tidigare erfarenheter och förkunskaper. van Oers (2014) framhåller att stöttning ska anpassas efter elevernas kunskapsnivå och behov genom lärarens modellering där läraren ger en stegvis vägledning i tillvägagångssätt, men även genom generella lösningar och ledtrådar. Det är viktigt att undervisningsinnehållet är rätt anpassat för att lärande ska äga rum. van Oers (2014, s. 761) skriver att nivån ska överstiga elevernas nuvarande kunskapsnivå.

Scaffolding har sina grunder i sociokulturell teori och är en relevant teori för den del av vår studie som avser undersöka lärarens matematikdidaktik i undervisningen. Lärarens tillvägagångssätt vid stöttning och vägledning av elevernas lärande är en viktig del av studien för att förstå hur läromedlet förmedlas till elever. En begränsning med teorin i denna studie kan vara att säkerställa huruvida stöttningen faktiskt sker i praktiken. I denna studie studeras scaffolding utifrån lärares svar som framkommer i intervju- och enkätsvaren.

3 Tidigare forskning

I detta kapitel presenteras tidigare forskning inom matematiskt språk och läromedel. Kapitlet delas upp i sex avsnitt som inleds med en kortare presentation om varje forskare, följt av relevanta resultat från forskningsstudierna som avslutas med en sammanfattning. Dessa forskningsstudier utgör tre doktorsavhandlingar och tre vetenskapliga artiklar skrivna mellan åren 2013 och 2020. Avsnitten presenteras utifrån tre övergripande teman inom matematikdidaktik vilka är: *språkets roll*, *räknemetoder* och *läromedlets roll*.

3.1 Språkets roll i matematikklassrummet

3.1.1 Ämnesspråket som resurs

Ida Bergvall är universitetslektor i pedagogik, didaktik och utbildningsstudier vid Uppsala universitet, och har skrivit doktorsavhandlingen *Bokstavligt, bildligt och symboliskt i skolans matematik – en studie om ämnesspråk i TIMSS* (2016). I denna forskningsstudie analyserades provresultat från den svenska versionen av TIMSS. Provresultaten baserades på 5573 elevresultat i årskurs 8, varav 217 matematikuppgifter identifierades. Analysen fokuserade på hur ämnesspråket i matematik framställs av elever i provsammanhang.

Bergvall (2016) framhåller tanken om att ämnesspråket har en avgörande roll i matematikundervisningen eftersom språket fyller olika funktioner. I denna forskningsstudie ligger fokuset på tre semiotiska resurser som är bild-, skrift- och symbolspråk (Bergvall 2016, s. 13). I matematik framställs ämnesspråket som mer formellt och tekniskt, vilket bygger på skriftspråket (Bergvall 2016, ss. 15,17). Vidare betonas vikten av att eleverna ska få förutsättningar att utveckla sitt matematiska språk, vilket sker när de får uttrycka matematiska idéer med både ämnesspecifika och vardagliga ord (Bergvall 2016. ss, 75,79). De vardagliga begreppen grundas i muntliga uttryck och är av mer generell karaktär (Bergvall 2016, s. 15). När elever får arbeta parallellt med såväl ämnesspecifika som vardagliga uttryck innebär det också att eleverna ges möjligheter till att uttrycka matematiska tankar på flera olika sätt. Dessa tankar leder vidare till ett meningsfullt lärande där semiotiska resurser personifieras och utnyttjas till sin fulla potential inom de grundläggande matematiska områdena aritmetik, geometri, algebra och statistik.

För att elever ska få möjlighet att nå språkutveckling i matematik behöver läraren stötta och anpassa genom att omformulera eller förenkla ämnesspråket (Bergvall 2016, s 31). Det innebär att lärare har en central roll i undervisningen eftersom hen behöver vägleda elever till att använda semiotiska resurser i matematik och bygga en koppling mellan resurserna och det ämnesspecifika språket. Ett exempel är att använda vardagligt språk med vardagsnära exempel för att underlätta elevers förståelse för räkneoperationer samt hjälpa dem att verbalisera ämnesspråket (Bergvall 2016, s. 32). En metod som nämns för att utveckla elevers ämnesspråk är att låta dem skapa egna ordlistor av ämnesspecifika begrepp med egna exempel i skrift, symbol och bild (Bergvall 2016, s. 11). Dessa ordlistor kan hjälpa eleverna att visualisera och förstå olika perspektiv av matematiska begrepp, vilket stärker deras begreppsförståelse.

Slutsatsen av forskningsstudien (Bergvall 2016) är att elevers matematikutveckling hindras av bristande kompetenser om matematiskt ämnesspråk. Lärarstöd har stor betydelse för att stärka elevers ämnesspråk där förklaringar samt användning av semiotiska resurser erbjuds. Det är även av värde att arbeta med relationen mellan vardagliga och ämnesspecifika former. Det innebär att en blandning av formerna och resurserna föreslås för god matematikutveckling.

3.1.2 Semiotiska resurser och begreppssammanhållning

Anneli Dyrvold är universitetslektor i institutionen för pedagogik, didaktik och utbildningsstudier vid Uppsala universitet, och har skrivit vetenskapsartikeln *Relations between semiotic resources in matehamatics tasks: a source of students' difficulties* (2020). I forskningsstudien analyserades sambandet mellan semiotiska resurser och begrepp i 133 uppgifter i PISA och 354 uppgifter i Nationella prov i Sverige som utgör intervallet 2003 till 2013.

Dyrvold (2020) framhåller att matematikuppgifter kräver färdigheter i att kunna tolka samt kunskaper att avläsa semiotiska resurser. Dessa resurser framställs som språkbehandling (natural language), symbolspråk (notation) och bilder (images). För att kunna göra en rimlig avläsning av de olika semiotiska resurserna krävs först en förklaring av begreppet, därefter en modellering där begreppet sätts i ett vardaglig samt matematiskt sammanhang, och sedan presenteras en visuell bild, symbol eller tecken som återknyter till begreppet (Dyrvold 2020, s. 267). Det innebär att en brygga (cohesion) mellan förståelse av matematiska idéer och användning av semiotiska resurser utvecklas när kunskaper får befästas på detta sätt.

Elevers förkunskaper är grundläggande vid uppbyggandet av matematiska kunskaper, vilket i forskningsstudien (Dyrvold 2020) identifieras som en sammanhållning (cohesion) mellan ämnesspecifika och vardagliga ord. Dyrvold (2020, ss. 270-271) betonar att ämnesspecifika ord är överrepresenterade i matematikuppgifter, vilket gör att eleverna endast erbjuds möjligheter att tyda semiotiska resurser ur olika dimensioner. Om möjlighet ges att i stället översätta dessa resurser kan utforskande av och förståelse för matematiska idéer byggas upp. Dyrvold (2020, s. 269) framhåller att matematikutveckling nås när elever får möjlighet att själva sätta egna ord på olika semiotiska resurser. Det innebär att elever som kan använda olika semiotiska resurser flexibelt kan även göra rimliga tolkningar av matematikuppgifter. För att lösa matematikuppgifter krävs därmed hög kompetens om semiotiska resurser samt hur dessa samverkar med sammanhållning (cohesion) mellan begreppen (Dyrvold 2020, s. 268). Semiotiska resurser är således en viktig representationsform för att befästa kunskaper om matematiska begrepp och kunna tolka de olika uttrycken inom matematik (Dyrvold 2020, s. 281).

Slutsatsen av forskningsstudien (Dyrvold 2020) är att elever behöver få många möjligheter att tolka samt översätta olika semiotiska resurser. Resurserna behöver sammanhållas (cohesion) med begreppsförståelse. Tillsammans möjliggör resurserna och begreppsförståelse att eleverna kan nå en god läs- och skrivutveckling i matematik. Det understryks även att elever har flera fördelar av att kunna tolka, översätta och avläsa de olika semiotiska resurserna eftersom dessa hjälper de att uttrycka och förstå matematiska koncept bättre.

3.1.3 Resonera med matematikspecifika begrepp

Cecilia Segerby är speciallärare i matematik och universitetslektor i matematikdidaktik vid Högskolan Kristianstad, och har skrivit doktorsavhandlingen *Supporting mathematical reasoning through reading and writing in mathematics – Making the implicit explicit* (2017). Forskningsstudien undersökte hur begreppsförståelse kan förstärkas i undervisningen och genomfördes som en interventionsstudie kallad Educational Design Research (EDR). Interventionsstudien pågick i 15 veckor som utformades utifrån en förstudie och i samråd med lärare i årskurs 4.

I forskningsstudien (Segerby 2017) prövades flera undervisningsaktiviteter utifrån EDR-metoden, där aktiviteterna i studien har som syfte att utveckla elevers resonemangsförmåga i matematik. EDR är en metod där forskare och lärare samarbetar, utvärderar och prövar olika aktiviteter tillsammans som får olika framgångsrika resultat inom undersökningsområdet (Segerby 2017, ss. 62–65). Undervisningsmodeller som tillämpades i denna forskning identifieras som Reciprocal Teaching (RT) och System Functional Linguistics (SFL) (Segerby 2017, ss. 10, 70).

Enligt Segerby (2017, s. 13) är det avgörande att elever inte enbart får arbeta enskilt med läromedel, utan behöver både anpassning och stöttning av läraren att få utveckla resonemangsförmågor. I matematik är en vanlig undervisningsmetod att lärare förlitar på att eleverna kan arbeta enskilt i läromedel. Det innebär således att elever inte alltid ges förutsättning att utveckla sina språkliga förmågor i matematik. Segerby (2017, ss. 102–106) framhåller att matematisk språkförmåga kan byggas upp med hjälp av tidigare kunskaper utifrån tre resonemangsfaser som bygger på varandra. Den första fasen (imitative phase) innebär att eleverna kopierar färdiga ordlistor som nämns i läromedel och som sedan byggs ut i den andra fasen (limited mathematical reasoning) där eleverna tillämpar egna formuleringar samt exempel. När de två första faserna är uppnådda byggs dessa ut i den tredje fasen (richer mathematical reasoning) där eleverna får dela med sig av sina lösningsstrategier i en heldiskussion.

Resultatet från forskningen (Segerby 2017, ss. 108–109) visar att elever som varit med i interventionsstudien fick en utvecklad resonemangsförmåga i matematik. Denna utveckling påverkades av att eleverna fick hög exponering av olika matematiska begrepp och representationsformer. Det visar även att elever som fick möjlighet att diskutera olika effektiva lösningsstrategier även blev mer uppmuntrade att våga utforska olika verktyg i matematik för att fördjupa sin resonemangsförmåga. För att utveckla goda resonemang i matematik spelar även klassrumskulturen en betydande roll, eftersom vissa elever hade motvilja att initialt testa nya metoder för att resonera matematiska problem.

Slutsatsen av forskningsstudien (Segerby 2017, ss. 28, 33) är att eleverna behöver få möjlighet att tänka, resonera och diskutera olika strategier i matematik för att bygga upp begreppsförståelse och därmed resonemangsförmåga. Detta är avgörande för uppbyggande av matematiskt språk eftersom språket i matematikämnet skiljer sig från det vardagliga språket och andra ämnen i skolan.

3.2 Räknemetoder i addition och subtraktion

Margareta Engvall är lågstadielärare och tidigare studierektor vid Linköpings Universitet, som har skrivit doktorsavhandlingen *Handlingar i matematikklassrummet - En studie av* *undervisningsverksamheter på lågstadiet då räknemetoder för addition och subtraktion är i fokus* (2013). Forskningsstudien undersökte användning av skriftliga räknemetoder på lågstadiet som genomfördes under två terminer hos fyra klasser samt klasslärare i årskurs 2 via observationer och videoinspelningar.

Den svenska matematikundervisningen präglas av läroplanen och de traditionella synsätten på att matematikämnet utgör algoritmräkning i form av procedurer (Engvall 2013, s. 48). Procedurkunskap förklaras som ett sätt för elever att redovisa sina val av räknemetoder i skriftlig huvudräkning (Engvall 2013, s. 45). Algoritmräkning beskrivs som en mekanisk process att lösa addition och subtraktion utan att nödvändigtvis förstå de underliggande principerna för de metoder som används (Engvall 2013, s. 49). Engvall (2013, s. 226) identifierar procedurkunskap som ett sätt för lärare att introducera arbetsområdet som sedan följs av att eleverna får arbeta ensamma med läromedlet där arbetsområdet behandlas. Det innebär att läromedlet ligger i fokus och lärare förlitar sig på att elever använder sina procedurkunskaper.

Forskningsstudien (Engvall 2013, ss. 238–241) visar att elever ges olika möjligheter att utveckla matematikkunskaper, beroende på vilken typ av undervisningsmodell läraren tillämpar. Undervisningsmodellen framställs av Engvall (2013, s. 239) som följande figur (2):

			Resonemangs-förmåga
		Kommunikations-förmåga	Kommunikations-förmåga
	Begrepps-förmåga	–	Begrepps-förmåga
Tilltro, intresse	Tilltro, intresse	Tilltro	Tilltro
Metod- och beräknings-förmåga	Metod- och beräknings-förmåga	Metod- och beräknings-förmåga	Metod- och beräknings-förmåga
Procedurinriktad	**Procedur- och begreppsinriktad**	**Procedur- och kommunikations-inriktad**	**Begrepps- och argumentations-inriktad**

Figur 2: Undervisningsmodeller i Engvall (2013, s. 239)

Dessa modeller visar att lärare som inriktar undervisningen mot begrepp och argumentation möjliggör att flera förmågor utnyttjas i matematik till skillnad från lärare som väljer en mer procedurinriktad undervisning (Engvall 2013, ss. 240–241). Det innebär sålunda att begrepp och argumentation i matematik även möjliggör utveckling av elevers tilltro till sina egna kunskaper och uppbyggande av grundläggande kunskaper om begrepp och räknemetoder i matematik. Enligt Engvall (2013, s. 25) innebär procedurkunskaper i form av algoritmräkning inte per automatik att eleverna förstår sambandet mellan tiotalsövergång i talområdet 20 till 100, eftersom dessa är särskilt svåra för området addition och subtraktion på lågstadiet. Däremot anser Engvall (2013, s. 50) att algoritmräkning är nödvändigt för att lära ut addition och subtraktion, eftersom dessa bygger på kunskaper om att kunna använda mellanled i form av minnessiffror, vilket gör att tiotalsövergång kommer till hands för effektivare beräkningar.

Slutsatsen av forskningsstudien (Engvall 2013, s. 63) är att använda artefakter i form av laborativa material eller andra visuella material eftersom det krävs en brygga mellan representationsformerna och räknemetoderna för att elever ska utveckla matematiska kunskaper. Det är således avgörande att en variation av såväl procedur, begrepp- och resonemangsfokus samt kommunikation används för att eleverna ska nå matematikframgång. Det är även av värde att lärarstöd i form av scaffolding (Engvall 2013, s. 68) används för att elever ska förstå att matematik handlar mer än räknelagar och det är således viktigt att rikta elevers fokus mot att resonera om de räknemetoder och lösningsstrategier som tillämpas.

3.3 Läromedlets roll i matematikklassrummet

3.3.1 Läromedel som undervisningsverktyg

Madis Lepik är biträdande professor och forskare i utbildningsmetodik för matematik vid Tallin University, har skrivit vetenskapsartikeln *Analyzing the use of textbook in mathematics education: the case of Estonia* (2015). Forskningsstudien undersökte hur läromedel används i matematikklassrummet och genomfördes via enkäter baserade på 164 lärare samt observationer baserade på 29 lågstadieklasser i Estland.

Forskningsstudien (Lepik 2015) visar att läromedel har en avgörande roll i skolans matematikundervisning, eftersom dessa används bland matematiklärare i Estland. Enligt Lepik (2015, ss. 93–94) finns det låg kännedom om läromedelsanvändning i matematikämnet i Estland, vilket även resulterade i forskningsstudien. Lepik (2015, ss. 90–92) framhåller att det är vanligt att skolor använder läromedel från samma serie under en längre period, vilket resulterar i att beslut som fattas om att byta ut läromedel i undervisningen är sällsynta.

I enkätsvaren från forskningen (Lepik 2015, s. 99) framgår att 38% av lärarna höll med om att deras undervisningsmetoder ofta påverkas av läromedlets instruktionsmetoder. Detta indikerar på att majoriteten av lärare i studien har en tradition av att utveckla egna undervisningsmetoder, vilket bidrar till en mångsidig undervisningspraxis och anses vara en positiv aspekt i matematikundervisning. Forskningen (Lepik 2015, s. 100) visar även att 90% av lärare i studien låter eleverna använda läromedlen som en övningsbok, vilket gör att läromedlen inte används till sin fulla potential som den är avsedd för i undervisningen. Det innebär att de textbaserade uppgifterna används i lägre utsträckning, eftersom övningsuppgifterna i läromedel innehåller många räkneoperationer. Lepik (2015, s. 100) betonar att läromedel har en central roll i lärarnas planering och undervisningsförberedelser, eftersom läromedel används som medling av den officiella läroplanen. Detta indikerar på lärarnas urval av material och ordningen som innehållet presenteras i läromedlet, det vill säga vad i innehållet som ska läras ut.

Slutsatsen av forskningsstudien är att läromedel har en viktig roll i matematikklassrummet eftersom den används flitigt under ungefär hälften av lektionstiden (Lepik 2015, s. 98). Eftersom läraren fungerar som en medlare av läroplanen är det således avgörande att eleverna lär sig använda läromedlet på ett effektivt sätt som leder till lärande (Lepik 2015, s. 93). Det innebär sålunda att läromedel kan utnyttjas till sin fulla potential om de används som en mångfacetterad resurs där även läsförståelse inkluderas.

3.3.2 Läromedel som traditionell artefakt

Ann-Katrin van den Ham, biträdande professor i utbildningsvetenskap vid Hamburg University och Aiso Heinze, professor i matematikutbildning vid Leibniz Institute of Science, har tillsammans skrivit vetenskapsartikeln *Does the textbook matter? Longitudinal effects of textbook choice on primary school students' achievement in mathematics* (2018). Forskningsstudien undersökte läromedlets inverkan på undervisningen och genomfördes som en analys av data från en longitudinell studie där extrainsatta stödprogram infördes i matematikundervisningen på lågstadiet.

Forskarna skriver att läromedel tillskrivs en central roll i undervisningen och undersöker huruvida detta stämmer. I studien undersöktes läromedlens effekt på undervisningen och elevers prestationer. Samtliga läromedel som ingick i studien utgick från en och samma läroplan. De skriver om läromedlets roll att tolka den abstrakta läroplanen och dess innebörd (van den Ham & Heinze 2018, ss. 134–135). Författarna skriver också att det är viktigt att ta hänsyn till att läromedel utformas och skrivs av författare, som gjort egna tolkningar av läroplanen. Läromedlen blir således medlare av läroplanens innehåll till för dess användare.

Läromedel används frekvent i det dagliga skolarbetet och skiljer sig i struktur, innehåll och även i den pedagogiska stilen. Detta ger således elever olika inlärningsmöjligheter beroende på vilket läromedel som används i matematikundervisningen. 87,2% av lärarna svarade att läromedel styr deras undervisning. Då läromedel har en styrande roll i lärarens undervisning visade resultaten att valet av läromedel har en betydande effekt på elevernas prestationer. Forskarna konstaterade således att resultaten pekar på att läromedlen i deras urvalsgrupp betraktades som en primär källa för lektionsplaneringen i matematikundervisningen (van den Ham & Heinze 2018, s. 136). Läromedel är viktiga resurser för både lärare och elever då de både påverkar lärarens undervisning och elevernas prestationer.

Slutligen skriver forskarna (van den Ham & Heinze 2018, s. 134) att läromedel är artefakter som utformas i olika historiska och kulturella kontexter och som utformas med specifika avsikter och mål.

3.4 Sammanfattning av tidigare forskning

Studien har som syfte att identifiera tre områden i läromedel, vilka är *representationsformer*, *matematikspecifika begrepp* och *räknemetoder*. Dessa utgör även urvalet av forskningsstudierna som har studerats inom området.

Tre av forskningsstudierna (Bergvall 2016, Dyrvold 2020, Segerby 2017) behandlar representationsformer och matematikspecifika begrepp. I Bergvalls (2016) forskningsstudie framställs matematik som en semiotisk resurs där en blandning av ämnesspecifika och vardagliga begrepp förespråkas. Dyrvold (2020) betonar att elever behöver få möjlighet att göra egna tolkningar och översättningar av de semiotiska resurserna för att utveckla begreppsförståelse i matematik. Segerby (2017) lyfter fram vikten i att elever får möjlighet att diskutera och resonera om olika matematiska problem för att på så sätt bygga upp resonemangsförmåga i matematik. Resonemangsförmåga utgör grunden för begreppsförståelse eftersom det ämnesspråket skiljer sig från vardagsspråket även om samma begrepp kan användas inom matematik, vilket återknyter till Bergvalls (2016) forskningsstudie om att använda båda språkliga formerna för att underlätta elevers lärande.

Forskningsstudien av Engvall (2013) belyser hur räknemetoder kan läras ut i matematikundervisning. Undervisningsmetoderna utgör framför allt det som lärare själva utgår ifrån och förespråkas som en variation mellan användning av laborativa material, begrepp och resonemang. Variationen i undervisningen utgör kopplingar mellan olika områden och visar på samband mellan olika representationsformer. Detta grundas i att läraren undervisar och stöttar upp elever i hur räknemetoder framställs.

Två av forskningsstudierna (Lepik 2015, van den Ham & Heinze 2018) behandlar internationella perspektiv om läromedlens funktion i matematikundervisningen. Lepik (2015) lyfter fram att lärare använder läromedel som ett instrument att medla läroplanen och att läromedlen används för att eleverna ska öva på olika räkneoperationer. Det innebär att fokus läggs på den mekaniska matematikproceduren och inte på de centrala begreppen i textuppgiften. Textuppgifter behandlas således inte i lika hög utsträckning och detta kan påverka elevers inlärning av det matematiska språket och begreppsförståelsen. I forskningen av van den Ham och Heinze (2018) framställs läromedel som en historisk och kulturell artefakt som används i matematikundervisningen, vilket återknyter till Lepiks (2015) forskningsstudie om att läroplanen ligger i fokus för användningen.

Dessa forskningar är alla relevanta för denna studie eftersom de tillsammans utgör ett holistiskt forskningsperspektiv av läromedel och lärares uppfattning om val samt användning av verktyg och resurser som används i matematikundervisning i grundskolan.

4 Material & metod

I detta kapitel diskuteras först studiens metod- och materialval i sin helhet utifrån urval och avgränsningar med utgångspunkt i Bryman (2018). Därefter diskuteras studiens validitet och reliabilitet som avslutas med en reflektion kring etiska aspekter av urvalen med utgångspunkt i Tivenius (2015).

I denna studie har en *mixed method research* använts, vilket har sin utgångspunkt i Bryman (2018). Fördelen med en flermetodsforskning, som det även kallas för, är att datainsamlingen skett via flera tillvägagångssätt för att komplettera varandra (Bryman 2018, s. 286). Empirin har i denna studie samlats in via en innehållsanalys av läromedel, analys av semistrukturerade intervjuer och enkäter. För att samla in material användes intervjufrågor (se bilaga 2) och för att analysera materialet användes analysschema (se bilaga 3 & 5) som verktyg. Analysschemat användes i syfte att systematisera innehållsanalysen och lärarsvaren. Ett inslag av variationsteori (Lo 2014) användes vid utformande av analysschemat. Analysscheman är uppdelade i teman och har som syfte att lyfta fram variationer i *representationsformer*, *begrepp* och *räknemetoder* inom addition och subtraktion som använts i årskurs 1. Varje analysområde granskades tre gånger för att säkerställa att respektive område analyserats korrekt. Det är således av hög relevans att empirin i denna typ av studie samlats in via en innehållsanalys som metod och kompletterats med intervju- och enkätsvar för att öka studiens tillförlitlighet och giltighet.

4.1 Datainsamling & urval

4.1.1 Innehållsanalys av läromedel

Bokförlagen *Natur & Kultur* och *Studentlitteratur* bidrog generöst med läromedel (se bilaga 4) till innehållsanalysen. Kontakten med bokförlagen skedde via mejl samt besök på ett av förlagen. Innehållsanalysen genomfördes parallellt med analysen av intervju- och enkätsvar, vilket sammanställdes i ett analysschema (se bilaga 3 och 5) under en vecka. Avgränsningen av urvalen av de analyserade sidorna i läromedlen styrs av studiens syfte och de frågeställningar som ställts. Även tidsbegränsningen har delvis varit avgörande av urvalen. De analyserade sidorna valdes ut utifrån innehållsförteckningen i respektive läromedel där addition och subtraktion nämns tydligt och behandlas i sin helhet. Det innebär att endast utvalda kapitel har analyserats och de övriga sidorna tas inte med i innehållsanalysen även om vissa sidor kan identifieras som addition eller subtraktion. Det innebär att området multiplikation och division inte behandlas även om addition och subtraktion kan ingå i dessa områden. En annan avgränsning är att fotnoter inte har tagits med i analysen eftersom de inte ingår i instruktion av uppgiften. Däremot har kapitelnamn och rubriker inkluderats i innehållsanalysen då dessa ingår i uppgiften och är därför en del i analysen av matematikspecifika begrepp. De representationsformer och räknemetoder som inkluderats i urvalet utgår ifrån de avsnitt som behandlats i kapitel om addition och subtraktion, med syfte att illustrera matematiska koncept för eleverna. För att empirin ska undersökas på ett säkert och rättvist sätt har därmed begrepp och representationsformer från lärarsvaren även tagits med i analysen.

Läromedel som undersökts är *Eldorado matte* (EM) (Olsson & Forsbäck 2015), *Favorit matematik* (FM) (Haapaniemi, Mörsky, Tikkanen, Vehmas & Voima 2018), *Pixel matematik* (PM) (Alseth, Arnås, Kirkegaard & Røsseland 2015) och *Singma matematik* (SM) (Agardh & Rejler 2017). För att möjliggöra objektivitet har titlarna inte skrivits ut under kapitlen resultat & analys och diskussion. Fokus ligger i stället på att lyfta fram hur de olika undersökningsvariablerna representationsform, begrepp och räknemetoder framställs i läromedel överlag. Dessa läromedel valdes ut utifrån ett slumpmässigt urval (SM & PM) och bekvämlighets- samt specifikt urval (EM & FM). De specifika urvalen valdes ut eftersom de använts på tidigare VFU-praktiker. Läromedlet FM framgår av bokförlagets hemsida som en populär lärobokserie i många svenska skolor, medan läromedlet SM framställs av bokförlagets hemsida som ett unikt läromedel med beprövade undervisningsmetoder. Läromedlen EM och PM framställs som roligt och kreativt av bokförlagets hemsida. Samtliga läromedel är intressant för denna studie, eftersom de alla ingår i en läroboksserie från F-3 och vissa av läromedlen sträcker sig ända upp till årskurs 9 i grundskolan. Denna studie har inte som avsikt att peka ut någon specifik läromedel som förespråkas, utan endast lyfta fram analys av begrepp, representationsformer och räknemetoder som synliggörs i läromedlen. Med utgångspunkt i detta kommer samtliga titlar benämnas med förkortningar, eftersom en titel kan i denna studie vara utpekande. En annan avgränsning är valet av 1A och 1B matematikböcker med koppling till undersökningsområdet om matematikspecifika begrepp, där 1B analyserats mer detaljerat eftersom denna version förutsätter att eleverna redan lärt sig läsa och skriva. Matematikböckerna 1B bygger vidare på 1A och är i denna studie relevant för analysen då det är av värde att analysera progression mellan dessa när det kommer till talområden och hur räknemetoderna inom området addition och subtraktion introducerats i årskurs 1.

4.1.2 Analys av lärarsvar

Intervju- och enkätsvaren sammanställdes i ett analysschema (se bilaga 3) från fyra muntliga intervjuer och 27 enkätsvar under cirka två veckor parallellt med innehållsanalysen. I analysschemat redovisas 27 lärarsvar som är en sammanställning av både muntliga intervjusvar och enkätsvar. De muntliga intervjuerna genomfördes som en semistrukturerad intervju där varje intervju pågick mellan 35–45 minuter vilka utfördes på plats eller digitalt via Zoom efter respondenternas tillgänglighet. Enkätsvaren samlades in digitalt via Google Forms i en lärargrupp på Facebook. Urvalskriterierna avgränsas till studiens syfte och frågeställning om lärarens val av arbete med läromedel (se bilaga 4) i årskurs 1. Urvalet medförde att 4 av 27 enkätsvar valdes bort eftersom dessa inte uppfyllde urvalskriterierna då det framgick att några respondenter inte arbetade med någon av läromedlen som undersöktes eller inte har undervisat i årskurs 1 under de senaste tre åren. Urvalet utgick ifrån två grupper där den första gruppen förutsätter att respondenterna arbetar med något av läromedlen (se bilaga 4) i årskurs 1. Den andra urvalsgruppen utgick ifrån att respondenterna har arbetat med något av läromedlen EM, FM, SM eller PM i årskurs 1 inom de senaste tre åren. Urvalsgrupperna valdes ut för att kompensera för eventuella svarsbortfall. Enkätsvaren jämfördes mot de muntliga intervjusvaren för att skapa ett avkodningsschema där de muntliga intervjusvaren fungerade som en fördjupning av enkätsvaren.

En intervjuguide utifrån intervjufrågorna (se bilaga 2) användes för de semistrukturerade intervjuerna för att få syn på lärarens arbete med variationerna som använts i framställningen av addition och subtraktion i årskurs 1. Intervjufrågorna användes för att synliggöra lärares *scaffolding* i matematikklassrummet. Intervjuguiden är enligt Bryman (2018, s. 565) fördelaktigt eftersom den möjliggör fördjupning i intervjusvaren samtidigt som den lämnar flexibilitet kring ordningen av frågorna som ställs. Enkätfrågorna utgår ifrån intervjuguiden (se bilaga 2), men har i stället en fast frågeordning och innefattar svar med både en- och flervalsalternativ. Enligt Bryman (2018, s. 259) möjliggör fasta svarsalternativ, där respondenterna får kryssa i ett eller flera alternativ, en mer överskådlig överblick av svaren. Öppna svarsalternativ användes i enkätformuläret för att ge respondenterna möjlighet att själva fylla i egna svar om räknemetoderna då dessa kan se olika ut bland respondenterna.

4.2 Metodreflektion

4.2.1 Validitet och reliabilitet

I en forskning är det avgörande att datainsamlingen medför så rimliga och trovärdiga resultat som möjligt, vilket även Tivenius (2015, ss. 72–73) framhäver. Det innebär att studiens resultat ska ha valts ut och analyserats på ett giltigt och tillförlitligt sätt, vilket även kallas för validitet och reliabilitet. Analysen utgör en reflektion kring varje material- och metodval som använts i studien utifrån forskningsområdets syfte och frågeställning.

Validiteten i denna studie värderas utifrån urvalen av lärare, intervjufrågor, intervju- och enkätsvar, läromedel och analysverktyg. För att intervju- och enkätsvaren ska ha ett giltigt resultat identifierades tre områden: 1) vilken årskurs läraren arbetar i, 2) hur länge läraren varit yrkesverksam och 3) vilket läromedel som läraren använder i sin matematikundervisning. För att läromedelsanalysen ska ha ett giltigt resultat framställdes ett analysverktyg för att identifiera tre områden inom området addition och subtraktion: representationsformer, begrepp och räknemetoder. Analysverktyget skapades utifrån de teoretiska ramverk som använts i denna studie vilket utgör en innehållsanalys av läromedel och analys av enkät- samt intervjusvar.

För att mäta giltigheten i enkätformuläret behövdes samtliga öppna enkätsvar avkodas och tolkas innan en analys kunde genomföras. När respondenter får möjlighet att skriva in sina egna svar innebär det även en risk för att svaren kan feltolkas om svaret avläses felaktigt. Eftersom många av de öppna svaren hade ett liknande svar kunde därmed även de mindre tydliga svaren identifieras och avkodas på ett mer generellt och säkert sätt. De skriftliga enkätsvaren jämfördes mot de muntliga intervjusvaren, vilket är fördelaktigt för att kunna fördjupa samt förtydliga vissa svar. En annan viktig faktor för giltigheten är att samma frågor (se bilaga 2) användes i både de muntliga intervjufrågorna och enkätfrågorna, vilket ökar resultatets giltighet samt möjliggör att en mer likvärdig analys gjordes. För att dokumentera, sammanställa och systematisera lärarsvaren i en läsbar tabellform användes både Word och Excel-program på dator, där dokumentet laddades upp digitalt för att inte riskera att förlora data som samlats in samt arbeta med en live version. För att inte misstolka lärarsvaren kunde även vissa frågor ställas om på nytt eller förklaras för att datainsamlingen ska ske på ett giltigt sätt.

Reliabiliteten i denna studie värderas utifrån hur tillförlitligt, sant och pålitligt källorna, frågekonstruktionerna och undersökningsvariablerna utifrån forskningssyftet är. Varje läromedel har ett eget unikt innehåll och framställer addition och subtraktion på olika sätt. För att värdera resultatets tillförlitlighet har resultatet i enkät- samt intervjusvar och läromedel räknats om mekaniskt. Omräkningen utfördes mekaniskt tre gånger med målet att inte missa något som är av värde i lärarsvaren och utesluta att räkna in eventuella felkällor.

Resultatet från intervju- och enkätsvaren jämfördes mot varandra för att mäta samma variabler och avkodas på liknande sätt. Lärarsvaren användes som en fördjupning av enkätsvaren, vilket utgick ifrån innehållsanalysen. Resultatet från innehållsanalysen mättes utifrån urvalssidorna där addition och subtraktion nämns i innehållsförteckningen. För att öka resultatets reliabilitet gjordes även en övergripande läsning av läromedel 1A och 1B. Sammanfattningsvis har denna studie en hög validitet och reliabilitet eftersom resultatet förhåller sig till ämnesrelevansen för forskningen, samtidigt som enkät- och intervjusvaren kompletterar varandra. Eftersom vi är två som skriver denna uppsats har även samtliga källor som analyserats setts över en extra gång.

4.2.2 Etiska aspekter

För att skydda samtliga respondenter som bidragit med intervju- och enkätsvar behöver flera etiska aspekter tas i beaktning. Tivenius (2015, s. 74) sammanfattar dessa som informations-, samtyckes-, konfidentialitet- och nyttjandekrav. Utifrån studiens ämnesområde har samtliga intervjurespondenter blivit informerade om vad studien avser att undersöka, vilket skett i samband med utskick av en samtyckesblankett/informationsblad (se bilaga 1). För att skydda respondenternas identitet i såväl enkät- och intervjusvar har därmed känsliga uppgifter som respondenternas namn samt skola anonymiserats och benämns istället som *Lärare 1*, *2*, *3* och *4* i resultatsammanställningen av muntliga intervjusvar. Respondenterna blev även informerade om att endast relevanta delar från svaren kommer att användas i resultatsammanställningen. Vid insamling av enkätsvar presenterades information om studien kortfattat, att deltagandet är frivilligt samt att känsliga uppgifter anonymiseras i studentuppsatsen.

5 Resultat & analys

I detta kapitel presenteras resultaten utifrån fyra teman: *representationsformer*, *matematikspecifika begrepp*, *räknemetoder* och *övrigt*. Resultaten utgår från analysscheman i bilagorna 3 och 5 (se bilaga 3 & 5) och presenteras först i en summering följt av en analys. Därefter redovisas en slutsats av empirin i ett eget kapitel i förhållande till de teoretiska ramverk som använts i denna studie. Intervju- och enkätsvaren benämns i detta kapitel som lärarsvar och redovisas som diagram (se diagram 1–4), medan innehållsanalysen framförs som tabeller (se figur a-c). I intervjusvaren är de muntliga respondentsvaren inkluderade och vissa fördjupande svar redogörs i de avsnitt där muntliga intervjusvar framställs. Under temat *övrigt* redogörs progression i läromedel där kopplingar görs till Lgr 22 och tillhörande kommentarmaterial (Skolverket 2022a, 2022b). Progressionen är dock inte med i resultatet, men är däremot viktig för att få en förståelse över elevers förkunskaper om räknemetoder som tidigare tagits upp i läromedel 1A. Samtliga 1B läromedel som analyserats benämns i kapitlet med sina förkortningar EM, FM, PM och SM.

5.1 Representationsformer

5.1.1 Representationsformer i läromedel

I samtliga läromedel förekommer representationer i form av bilder som visuellt stöd. Frekvensen varierar och likaså det visuella stödets representation. De vanligaste *representationsformerna* är pengar, kuber, tallinje, fåror, prickar, ätbart, tiobuntar, djur, leksak, counters, x (okänd variabel), centikub, händer/fingrar, blomma, kulram, gren och räknestreck. *Fåror* beskrivs av SAOL (2023) som utgör en långsmal ränna eller fördjupning från en plöjning. *Centikub* är ett laborativt material som består av kuber som kan sättas samman och tas isär. Dessa illustreras i samband med ett matematiskt uttryck för att synliggöra en addition eller subtraktion med ental och tiotal.

I tabellen (se figur a) presenteras *representationsformer* som är kopplade till matematikuppgifter som behandlas i läromedel och fyller en funktion som visuellt stöd. Talen i tabellen står för antalet gånger som *representationsformerna* förekommer.

Representationsform	EM	FM	SM	PM
Pengar	6	12	-	17

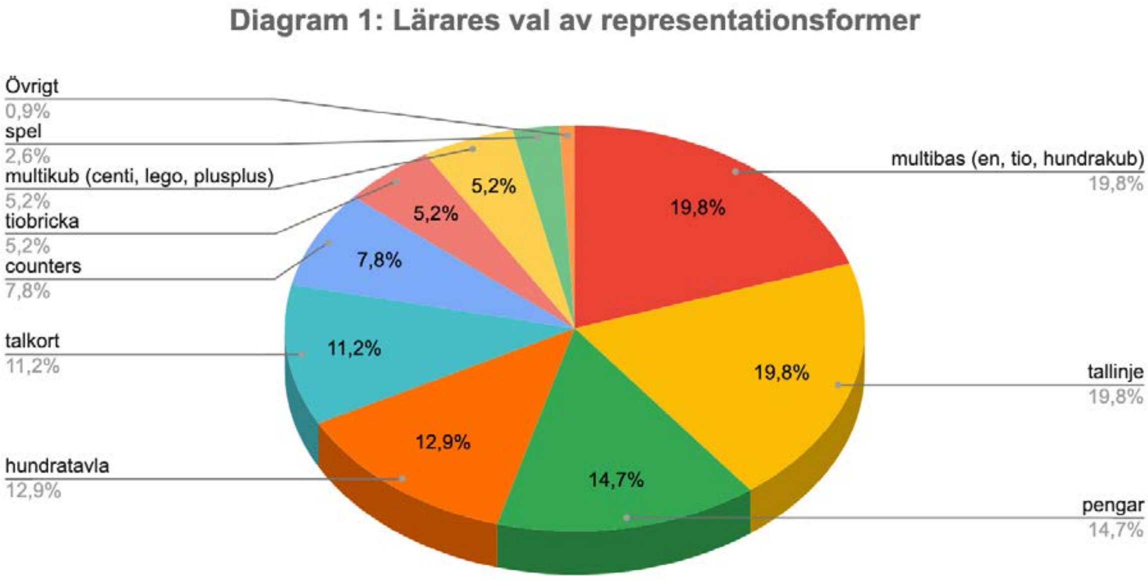
Kuber	-	1	15	4
Tallinje	-	12	2	9
Fåror	11	-	-	-
Prickar	-	10	1	-
Ätbart	1	9	7	-
Tiobuntar	8	-	-	-
Djur	-	7	-	2
Leksak	1	6	2	4
Counters	2	-	4	-
X (okänd variabel)	4	-	-	1
Centikub	-	-	4	-
Händer/fingrar	3	-	-	-
Blomma	-	3	-	-
Kulram	-	-	-	3
Gren	-	2	-	-
Räknestreck	1	-	-	-

Figur a: Representationsformer i läromedel

I tabellen (se figur a) har *representationsformerna* rangordnats störst först. *Pengar* förekommer i tre av fyra läromedel samt i form av sedlar, tiokronor och enkronor. Ett exempel på en representation i FM är subtraktionen $15 - 5$ som visas med hjälp av en 10 krona och 5 enkronor som ska subtraheras (Haapaniemi et al. 2018, s. 96). *Kuber* förekommer också i tre av fyra läromedel och representerar ental och gruppering av ental. Ett exempel på detta som illustreras med *tiotal* och *ental* i SM är additionen $22 + 15$, där termen 22 utgörs av två tiotals staplar och två lösa entalskuber, samt termen 15 som utgörs av en tiotalstapel och fem lösa entalskuber. Detta exempel ska med hjälp av illustrationen visa att $22 + 15$ kan adderas $20 + 10 + 2 + 5$. Additionen representeras av yttre *tankeredskap* i form av en bild på staplar och kuber som visar hur talsortsvis addition av tiotal och ental kan ordnas (Agardh & Rejler 2017, s. 27). *Tallinjen* förekommer i tre av fyra böcker och fyller funktionen som ett visuellt stöd eller *representationsform* som utgör talraden och visar hur en addition i FM vid exempelvis $8 + 4 = 12$ kan utföras genom att räkna upp från den största termen 8 som är markerade på tallinjen. En pil som sträcker sig från talet 8 fram till talet 12, 4 hopp, på tallinjen utgör summan av $8 + 4$ (Haapaniemi et al. 2018, s. 70). Unikt för EM är *fåror* som används för att förtydliga positionssystemet och talsortsvis addition och subtraktion där ental och tiotal ska adderas eller subtraheras var för sig. I läromedlet PM förekommer pengar som en återkommande *representationsform* som förtydligar addition och subtraktion med pengar som visualisering.

5.1.2 Representationsformer i lärarsvar

Diagrammet (se diagram 1) visar en sammanställning av 27 lärarsvar om val av *representationsformer* vid arbete med addition och subtraktion i årskurs 1.



Resultatet (se diagram 1) visar att *tallinje* och *multibas* är de *representationsformer* som föredras av lärare och som tillsammans utgör 40% av lärarsvaren. *Multibas* synliggörs som en-tio- och hundrakub, medan *tallinje* synliggörs som ett linjerat streck med siffran 0 och uppåt. Andra vanliga *representationsformer* är pengar, hundratavla, talkort och counters som tillsammans utgör 47% av lärare. *Pengar* framställs som en- och tiokronor, *hundratavla* som en tavla med siffrorna 1 till 100 och *talkort* innefattar siffror samt symboler. *Counters* är ett engelskt begrepp som står för plockmaterial, vilket enligt flera lärarsvar även kallas för ”plockisar” och synliggörs som bland annat pärlor, sudd och leksaksdjur. Andra mindre förekommande *representationsformer* som framgår i lärarsvaren är tiobricka, multikub, spel och övrigt, vilket utgör resterande 13% av lärarsvaren. *Spel* synliggörs som bland annat kortlek, memorykort med siffror samt ord och mattehus. *Multikub* synliggörs som kuber som kan sättas ihop på olika sätt. Under övrigt framställs *representationsformerna* Cuisenaires stavar, räknestreck, talblock, stickor, händer, fingrar och balansvåg.

Av de fyra muntliga intervjusvaren framgår att samtliga lärare använder laborativa material vid arbete med addition och subtraktion, speciellt när ett nytt arbetsområde introduceras. *Lärare 1* betonar att undervisningen behöver bygga på matematiska resonemang, vilket sker genom att presentera arbetsområdet med konkreta representationsformer som ”plockisar” till att sedan gå över till mer abstrakta former som utgör siffror, bilder och matematikspecifika begrepp.

> En del elever behöver bara se materialet en gång. Man ska inte arbeta för mycket med material och fastna i det stadiet. Det är mycket viktigare att eleverna lär sig strukturen i matte så dom kan generalisera det till andra områden. Sedan har jag andra elever som behöver materialet mycket längre och det är också okej, men det är viktigt att anpassa undervisningen efter alla elevers behov. (Lärare 2)

Lärare 2 anser att många elever blir alltför beroende av *counters* och missar poängen med att dessa ska används för att visualisera talens struktur och uppbyggnad. *Lärare 3* lyfter fram *talblock*, även kallad för *numicon* och *pengar* som ett effektivt visualiseringsstöd för elever som har svårt att räkna. Däremot anser läraren att pengar också kan uppfattas som abstrakt för många eftersom fysiska betalmedel bytts ut mot digitala. Lärare 4 framhåller att laborativa material är ett bra stöd för att förklara positionssystemet i form av en-, tio- och hundratal för elever.

> För dom elever som behöver brukar jag visa med kuber, talrader och pengar. Det gör att eleverna får en bild av hur talen är uppbyggda och kan själva arbeta vidare med uppgiften i matteboken. (Lärare 4)

En sammanfattning av lärarsvaren är att laborativa material används vid *scaffolding* i området addition och subtraktion i årskurs 1. Ett intressant fynd är att majoriteten av *representationsformerna* som förekommer i lärarsvaren (se diagram 1) utgör positionssystemet i form av 1, 10 och 100-tal.

5.1.3 Analys av representationsformer

De mest framställda *representationsformerna* i såväl läromedel som av lärare är pengar, kuber och tallinje. Bland lärare är det mer förekommande att använda counters, hundratavla och talkort som representerar addition och subtraktion, medan i läromedel används prickar i hög utsträckning. *Representationsformer* är således värdefulla verktyg som används i både läromedel och av lärare. Dessa *representationsformer* används för att synliggöra samt åskådliggöra matematiska symboler, talsystem och platsvärden, vilket kan återknytas till en-, tio- och hundratal som förekommer i positionssystemet. *Representationsformerna* kan även beskrivas som en lärares medierande verktyg som används för att synliggöra matematiska symboler och siffror. En likhet mellan *representationsformen* counters i såväl läromedel och av lärare är att det framställs som leksaksdjur. I läromedel är counters mer förekommande som leksaker och ätbara ting, medan lärare använder pärlor, sudd, kastanjer eller dylikt. Resultatet visar att *representationsformer* fyller funktionen att utveckla elevers inre tankeprocesser och uttryck i matematiska problem, vilket är i linje med teorin matematikspecifika tankeredskap. Målet med *representationsformerna* är att utveckla elevers färdigheter och förmågor att förstå och uttrycka matematik på olika sätt.

5.2 Matematikspecifika begrepp

5.2.1 Matematikspecifika begrepp i läromedel

I tabellen (se figur b) presenteras de *matematikspecifika begrepp* som är direkt kopplade till räkneuppgifter som förekommer i läromedel. Varje tal i tabellen står för antalet gånger som begreppet förekommer i varje läromedel.

Begrepp	EM	FM	SM	PM
tiotal	25	16	86	33
ental	12	6	85	34
subtrahera	1	37	12	4
många	17	32	23	15
sammanlagt	-	29	4	4
addera	1	19	18	9
mycket	7	18	-	9
summa	-	8	1	14
skillnad	3	-	13	2
saknas, fattas	2	11	6	-
kvar	2	10	5	6
addition	7	6	1	2
antal	6	4	7	4
subtraktion	7	8	3	1
tillsammans	2	1	-	-
differens	-	-	-	4

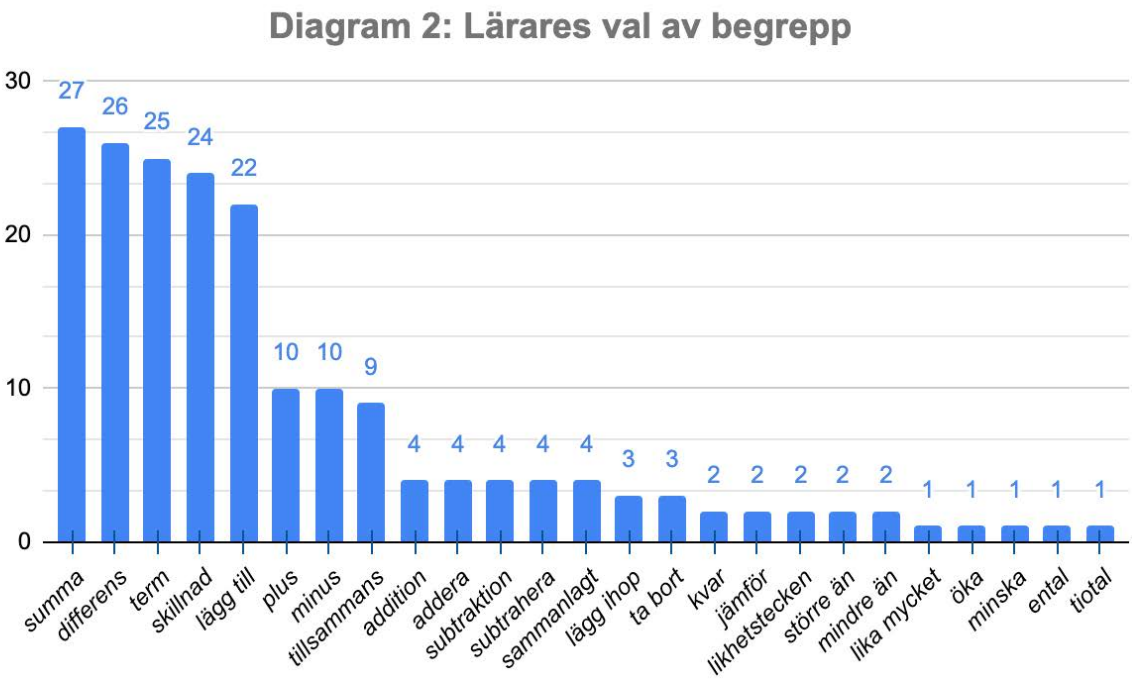
resten	-	4	-	-
ta bort	3	-	1	1
öka	1	-	-	-

Figur b: Begrepp i läromedel

Tabellen (se figur b) visar att frekvensen av *matematikspecifika begrepp* och terminologi varierar i olika läromedel. Tabellen är rangordnad efter de mest frekventa *matematikspecifika begreppen*. Termerna 'tiotal' och 'ental' förekommer konsekvent i samtliga läromedel i samband med addition- och subtraktionsuppgifter. Verbet 'subtrahera' förekommer i samtliga läromedel och används till mestadels som en kortare instruktion till eleverna vid subtraktionsuppgifter i läromedel FM och SM. Begreppet 'många' förekommer också i samtliga läromedel och syftar på många som i antal. 'Sammanlagt' är på femte plats av de mest använda begreppen i tabellen och förekommer i tre av fyra läromedel. Termen används i samband med addition och syftar till mestadels på summan av två eller tre termer. 'Addera' förekommer i samtliga läromedel i olika utsträckning och används likt 'subtrahera' som en kortare instruktion i samband med en räkneuppgift. Begreppet 'mycket' förekommer i tre av fyra läromedel och används framför allt i samband med räkneuppgifter som inkluderar räkneuppgifter med pengar. Som det framgår i tabellen förekommer inte begreppen 'plus' och 'minus' i de analyserade kapitlen. Begreppen 'term' och 'differens' förekommer endast ett fåtal gånger, medan 'summa' förekommer mer frekvent i ett av läromedlen. I läromedlet PM används till exempel begreppet 'summa' 14 gånger. I läromedlet EM förekommer till exempel 'addera' och 'subtrahera' en gång vardera.

5.2.2 Matematikspecifika begrepp i lärarsvar

I diagrammet (se diagram 2) redovisas en poängsammanställning från 27 lärarsvar om lärares val av begrepp i undervisning i årskurs 1 om området addition och subtraktion.



De *matematikspecifika begrepp* som enligt lärarsvaren används överlägset är 'summa', 'differens', 'term', 'skillnad' och 'lägg till' som fick mellan 22 och 27 i rankning. Enligt lärarsvaren används även begreppen 'plus', 'minus' och 'tillsammans' som vardera utgör 9 och 10 i rankning. De övriga begreppen används enligt lärarsvaren i mindre utsträckning eftersom de utgör vardera mellan 1 och 4 i rankning.

En sammanställning av samtliga muntliga intervjusvar hos fyra lärare framgår det att vardagliga begrepp som 'plus', 'minus', 'tillsammans' och 'ta bort' användas i betydligt högre utsträckning än de *matematikspecifika begreppen* 'summa', 'term', 'differens' och 'addera'.

> Innan eleverna får jobba med matteböckerna börjar jag med att berätta en saga om landet Matematica där man pratar matematiska. Det här gör jag tidigt med mina ettor eftersom dom blir väldigt nyfikna på narrativet då sagan är så målande och knyter an till deras verklighet. När jag läser sagan så brukar jag också ta pauser och bjuda in eleverna till samtal där vi pratar om de nya begreppen som dyker upp och tillsammans ritar upp bilder på tavlan. (Lärare 1)

Lärare 1 anser att eleverna behöver få möjlighet att resonera tillsammans för att lära sig begreppet. Läraren berättar att hen bygger upp ett narrativ från mattesagan *Landet Matematica* som är skriven av Marie Andersson (2005) för att bygga upp elevers förståelse för matematiskt tänkande och engagera dem genom att knyta an till deras vardag. *Lärare 2* framhåller att elevnära och vardagsanknutna begrepp är lämpligare begrepp att använda i lågstadiet. *Lärare 3* framhäver begreppen 'differens' och 'term' som två svåra begrepp, eftersom i subtraktion blir svaret inte en 'term' utan en 'differens', och därför kan begreppet 'minus' och 'ta bort' vara mer begripligt för eleverna. *Lärare 4* använder mer vardagliga termen 'svar' i stället för de mer formella ämnesspecifika terminologierna 'summa', 'differens' och 'term'. För att förstå symbolen likhetstecken använder läraren både det vardagliga begreppet tillsammans med en bildlig förklaring om likhetstecken utgör en lika stor våg på båda sidorna.

> Jag jobbar mycket med betydelsen av likhetstecken och förklarar för eleverna att tecknet motsvarar en våg. Vågen på ena sidan om är lika stor som vågen på andra sidan om likhetstecknet. (Lärare 4)

En sammanfattning av resultatet (se diagram 2) visar att majoriteten av lärare enligt lärarsvaren använder matematikspecifika begrepp som 'summa', 'differens' och 'term' i stor omfattning, men lärare kompletterar även med användning av vardagliga begrepp som 'skillnad' och 'lägg till'. Enligt lärarsvaren används 'plus' och 'minus' i lika stor utsträckning som ämnesspecifika begrepp. Det framgår även i lärarsvaren att begreppen 'lika', 'mycket', 'öka', 'minska', 'ental' och 'tiotal' inte används i lika hög utsträckning.

5.2.3 Analys av begrepp

De mer vardagliga begreppen kopplat till addition och subtraktion som förekommer flest gånger i läromedel är 'tiotal', 'ental', 'många', 'sammanlagt' och 'mycket', men även de ämnesspecifika begreppen 'subtrahera' och 'addera' förekommer ofta. Bland lärarsvaren förekommer fler ämnesspecifika begrepp som är 'summa', 'differens' och 'term', men även mer vardagliga begrepp som är 'plus', 'minus' och 'tillsammans'. Vad som särskiljer lärarsvaren från läromedlen är att 'ental' och 'tiotal' förekommer i hög utsträckning i tre av fyra läromedel, men nämns nästan inte alls i lärarsvaren. Vid arbete med addition och subtraktion är läraren en mänsklig mediator som väljer vilka begrepp som ska framhävas, men även den som ger möjlighet för elever att verbalisera matematiskt tänkande. I lägre årskurser blandas användning av såväl vardagliga som ämnesspecifika begrepp, vilket bygger på elevers grundläggande kunskaper om matematikspecifika begrepp. Med hjälp av begreppens framställning i läromedel får lärare möjlighet att synliggöra grundläggande begrepp för området addition och subtraktion som framställs i läromedel. Det är således avgörande att elevernas ges möjligheter att uttrycka matematiska idéer där de får sätta ord på lärandet med hjälp av lärarens guidning i att använda korrekta *matematikspecifika begrepp* kopplade till inlärningsområdet.

5.3 Räknemetoder

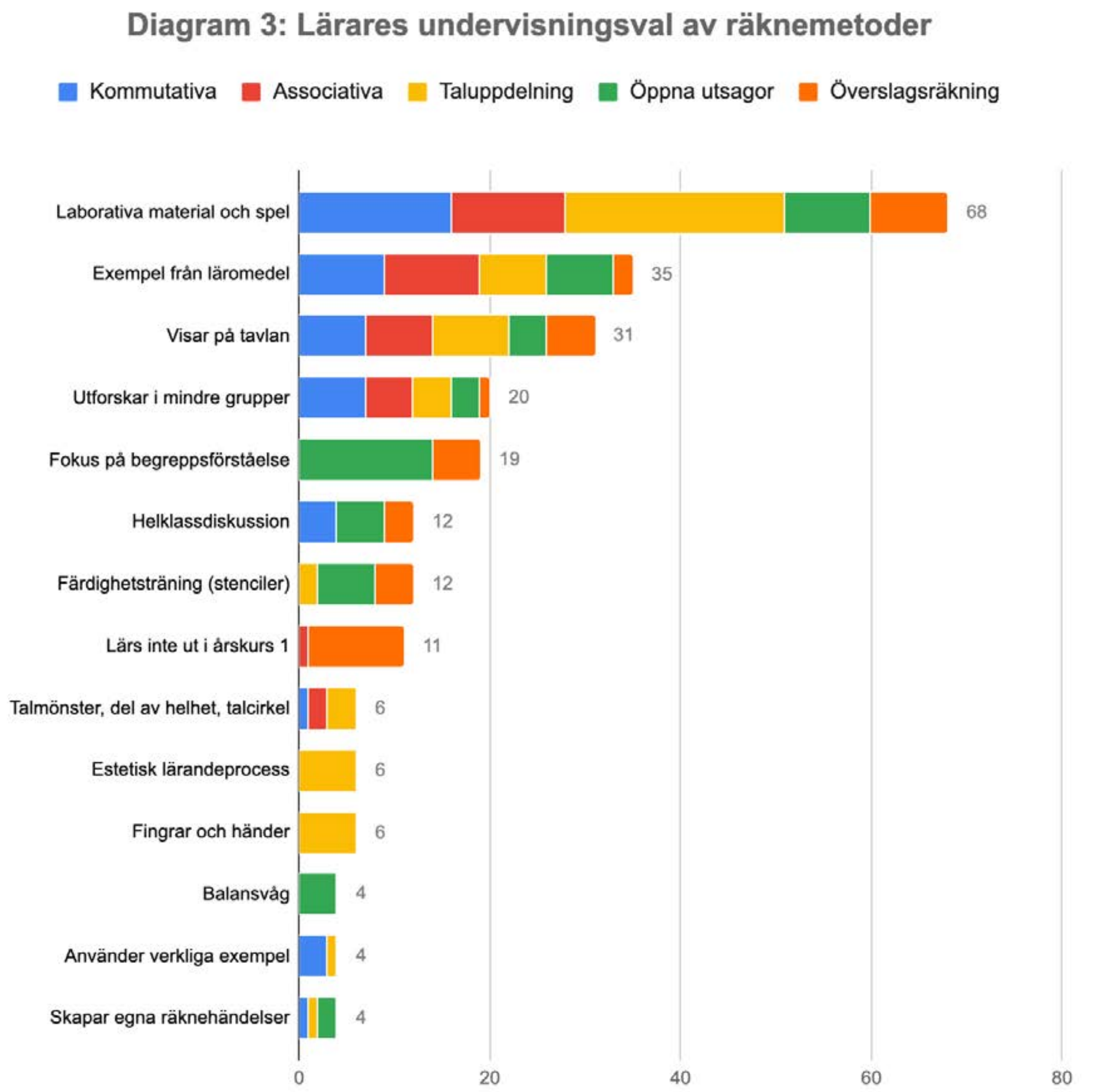
5.3.1 Räknemetoder i läromedel

Kommutativa räknelagen identifierades i två av fyra läromedel, men lagen benämns inte uttryckligen. Den *kommutativa räknelagen* kunde exempelvis identifieras mellan uttrycken $30 + 20$ och $20 + 30$ i FM (Haapaniemi et al. 2018, s. 118). I SM kunde *kommutativa räknelagen* identifieras i uttrycken $19 + 20 = \_\_$ och $20 + 19 = \_\_$ som tyder på att summan av additionen är densamma oavsett vilken ordning termen räknas i (Agardh & Rejler 2017, s. 24). *Den associativa räknelagen* kunde identifieras i samtliga läromedel i addition av tre termer i de analyserade kapitel i läromedel. Ett exempel på associativa lagen ur läromedlet FM är räkneoperationen $5 + 5 + 1$ där grupperingen sker enligt $(5 + 5) + 1$, tiokamraterna identifieras och adderas först för att sedan addera sista termen 1 för att få fram summan 11 (Haapaniemi et al. 2018, s. 55). Ett annat exempel på associativa lagen ur läromedlet SM är $3 + 9 + 7 = (3 + 7) + 9$ där gruppering sker av termerna 3 och 7 för att bilda ett jämnt tal (Agardh & Rejler 2017, s. 29).

Taluppdelningen identifierades i tre av fyra läromedel och förekom i olika stor utsträckning. *Taluppdelning* förekom i uppgifter där exempelvis termen 8 delas upp i 3 och 5 (Haapaniemi et al. 2018, s. 19). *Taluppdelning* fanns även med i sammanhang där en term delas upp för att underlätta en addition, som exempelvis $17 + 20$ där 17 kan delas upp i 10 och 7 (Agardh & Rejler 2017, s. 25). Även *öppna utsagor* behandlades i tre av fyra läromedel i olika utsträckningar, exempelvis vid additionen $3 + 2 + \_\_ =$ (Haapaniemi et al. 2018, s. 15). *Överslagsräkning* identifierades i två av fyra läromedel i uttryck som $9 + 1 + 6 = \_\_$ där möjlighet ges till att *överslagsräkna* från tiotalet (Haapaniemi et al. 2018, s. 64). Ett annat exempel som ger möjlighet till *överslagsräkning* är ur PM med framställning av operationen $16 + 8 = \_ + \_ + \_ = \_$ (Alseth et al. 2015 s. 50). I EM förekom *öppen utsaga* som $64 - \_ = 61$ (Olsson & Forsbäck 2015, s. 84).

5.3.2 Räknemetoder i lärarsvar

I resultatet (se diagram 3) redovisas en sammanställning av resultat från 27 lärarsvar om undervisningsval som används vid arbete inom området addition och subtraktion i årskurs 1, med fokus på räknemetoderna *kommutativa lagen*, *associativa lagen*, *taluppdelning*, *öppna utsagor* och *överslagsräkning*.



Av lärarsvaren framgår att *representationsformerna* laborativa material och spel används i störst utsträckning för att undervisa *räknemetoder* inom området *addition* och *subtraktion i årskurs 1,* vilka utgör sammanlagt 68 poäng. Några exempel på materialen nämns i lärarsvaren som bland annat counters, kuber, pengar, memorykort, kortlek och mattehus. På andra och tredje plats med sammanlagt 67 poäng använder lärare exempel från läromedel samt visar med olika exempel på tavlan. Det framgår även att lärare använder uppgifter, filmer och bilder som hör till läromedel. På fjärde plats framgår att lärare undervisar genom att låta elever utforska i mindre grupper, vilket sker genom att eleverna ges utrymme att diskutera och resonera om *räknemetoder* som används för att lösa uppgifterna som förekommer i läromedel. För att presentera *öppna utsagor* och *överslagsräkning* arbetar lärare med *begreppsförståelse* av symbolen likhetstecken [=] men även med begreppen 'ungefär', 'rimligt' och 'avrunda', vilket utgör 19 poäng. Det framgår även att *helklassdiskussion* och *färdighetsträning* i form av stenciler och kopieringsunderlag är de undervisningsformer som föredras för att lära ut *räknemetoder*, vilket utgör 12 poäng vardera.

Resultaten hos de fyra muntliga intervjusvaren visar att lärare anser att exempel från läromedlet samt tillhörande filmer och uppgifter på lärarwebben är effektiva vid undervisning av räknemetoder inom addition och subtraktion.

> Under min tid som lärare har jag jobbat med flera läromedel och tycker att dom går alldeles för fort fram. Jag tycker att eleverna borde få mer tid att få öva på samma område innan de går vidare till nästa. Då brukar jag skriva ut extramaterial från olika hemsidor och lärarforum. (Lärare 1)

Lärare 1 anser att läromedlen ofta går för snabbt fram och eleverna får inte tillräckligt med färdighetsträning i *räknemetoder* som behandlas. *Lärare 2* arbetar parallellt med egna exempel och läromedlet. Vid exempel kan både *representationsformer* från visuella material och vardagliga föremål som händer, fingrar, nycklar, leksaker och pengar användas enligt läraren.

> För att visa hur addition och subtraktion hänger ihop brukar jag använda mig av mattehuset. Det är ett hus med tak och två fönster som bildar tre luckor. I huset så placerar jag ut tre olika tal i luckorna. Sen låter jag eleverna få berätta hur dom tänker när dom ska lägga ihop eller ta bort talen i luckorna. (Lärare 3)

Lärare 3 arbetar med begreppsförståelse av symbolen likhetstecken och använder sig av Mattehuset som *representationsform* för att konkretisera addition och subtraktion samt underlätta elevers inlärning av både talkamrater och taluppdelning. Läraren förespråkar även taktilt arbete där eleverna får räkna smultron eller dylikt med fingrarna. *Lärare 4* använder sig av representationsformerna kuber och fingrar för att synliggöra *räknemetoder* och siffrors betydelser. Läraren betonar att modellering är viktigt för att eleverna ska förstå hur de räknar till närmsta tiotal och att i huvudräkning är det lättare att räkna från den största termen först.

En sammanfattning av lärarsvaren är att flera av lärare inte undervisar i *överslagsräkning* och *associativa lagen* i årskurs 1, vilket utgör 10 och 1 poäng. Av de minst nämnda undervisningsmetoderna är estetiska lärandeprocesser där sång, dans och rita tillämpas samt användning av fingrar, händer och balansvåg. Det framgår även att några lärare enligt lärarsvaren använder sig av verkliga exempel vid *scaffolding*, som till exempel att gruppera om antalet elever i klassen och låta dem skapa egna räknesagor för att befästa kunskaper om *räknemetoder*. Det kan innebära att ge stöd vid grupperingar och ledande frågor vid utformning av räknesagor.

5.3.3 Analys av räknemetoder

Kommutativa lagen förekom i läromedlen FM och SM. Inga *representationsformer* kunde identifieras i samband med de identifierade uppgifterna i läromedel för denna räknelag. Uppgifterna framställdes som matematiska uttryck (siffror och symboler) i läromedel, där lärare ger möjlighet att lyfta fram räknelagen och mediera den. Det förekommer även möjligheter till arbete med *den associativa lagen* i samtliga läromedel. Möjligheterna till arbete med *associativa lagen* i läromedel är i form av matematiska uttryck utan koppling till bilder, vilket innebär att det ges möjlighet till arbete med den räknelagen, men behöver medieras och synliggöras av lärare i undervisningen. *Taluppdelning* identifierades i tre läromedel (FM, SM och PM) och förekom i samband med visuellt stöd i form av ett inringat tal som delas upp i två termer med hjälp av två pilar. Ett exempel var $6 + 5$ där två pilar visade på hur termen 6 ska delas i 1 och 5 för att sedan genomföra additionen $1 + 5 + 5$. *Öppna utsagor* presenterades som matematiska uttryck, det vill säga $4 + \_\_ + 2 = 12$ i läromedlen EM, FM och SM. I läromedlen FM och PM kunde möjligheter till *överslagsräkning* identifieras och förekom i samband med visuellt stöd i form av bild på prickar som visade på hur en addition kan utföras med hjälp av att räkna upp till närmaste tiotal. Vid analys av lärarsvaren kan vi konstatera att lärare använder sig genomgående av laborativa material och spel för att belysa räknelagarna, men även *taluppdelning*, *öppna utsagor* och *överslagsräkning*. Parallellt arbete sker löpande mellan yttre representationer i form av laborativa material och lärares verbalisering. I lärarsvaren framgick att eleverna ges till viss del utrymme att verbalisera sina matematiska tankeprocesser i både helklassdiskussion och i mindre grupper. Ett annat exempel på hur lärare arbetar för att stötta elevernas begreppsförståelse i förhållande till läromedel är att de lyfter fram exempel ur läromedlen vid gemensamma genomgångar där de modellerar och medierar *räknemetoderna* på tavlan. Det görs både med bildliga *representationer* när de ritar på tavlan, och språkligt då lärare verbaliserar betydelsen med ord. Då får eleverna möjlighet att se kopplingen mellan *matematikspecifika begrepp* och *representationsformer*, vilket kan vara bild eller föremål.

Sammanfattningsvis finns det konsekventa inslag av medierande resurser och yttre representationer i form av laborativa material i undervisningen och lärares användning av läromedel. Lärares val av material och språkanvändning varierar beroende på elevernas behov, vilket kan kopplas till *scaffolding* och den stöttning eleverna behöver för att bygga upp och utvidga sina kunskaper. I de analyserade läromedel ges möjlighet till räknelagar och räknemetoder både som matematiska uttryck i kombination med visuellt stöd och som matematiska räkneuppgifter. En likhet är att *medierande resurser* framställs i såväl läromedel som i lärares undervisning vid arbete med *taluppdelning* då dessa stärks som visuellt stöd.

5.4 Övrigt – Progression i läromedel

5.4.1 Progression i läromedel

I tabellen (se figur c) visas progressionen av innehållet i fyra läromedel i 1A och 1B böcker.

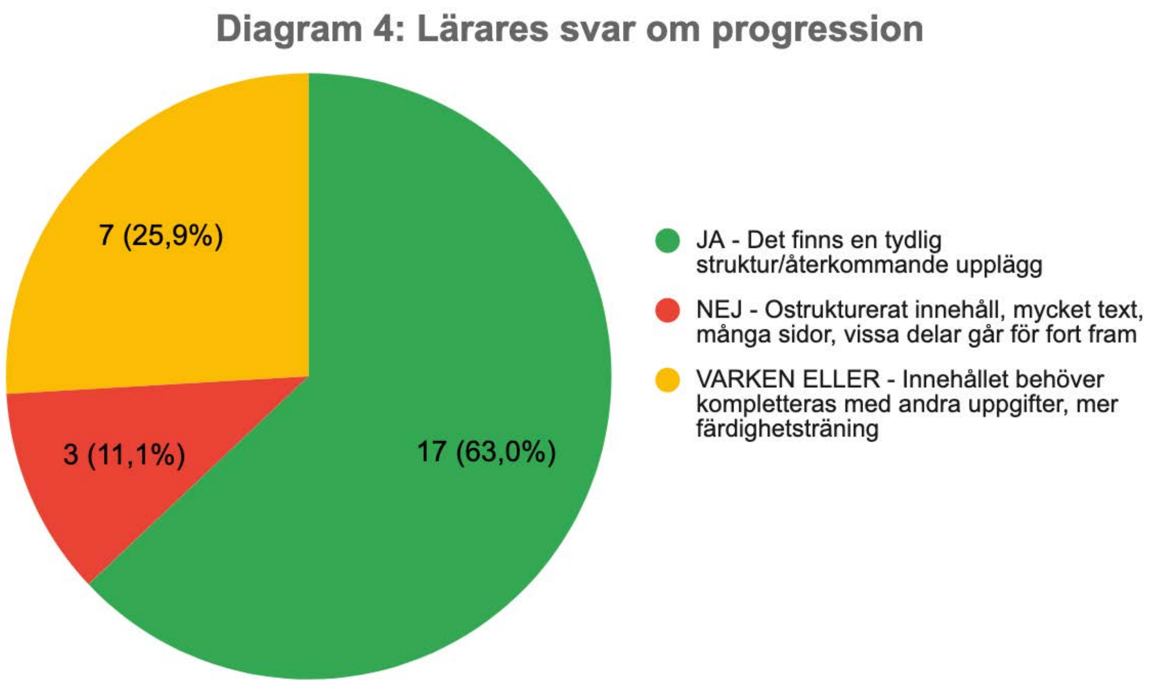
Läromedel 1A och 1B	Talområde	FM	*A* behandlar talområdet 0-12, kommutativa lagen, addition och subtraktion med tre termer, subtraktions-trappa och tiokamrater	SM	Ingen anmärkning	EM	*A* behandlar talkamrater i enskilda avsnitt: 2-5, 6, 1-6, 7, 8, 9, 1-10	PM	*A* behandlar subtraktion med 3 termer. *B* behandlar taluppdelning. *A och B* behandlar addition med 3 termer.
Addition	*0-10*	A+B		A+B		A+B		A+B	
	0-20	B		A+B		B		A+B	
	0-100	B		B		B		B	
Subtraktion	*0-10*	A+B		A+B		A+B		A+B	
	0-20	B		A+B		B		A+B	
	0-100	B		B		B		B	

figur c: Progression i läromedel A och B

Vad som utmärker *progressionen* i de fyra läromedel som granskats är att i 1A-böcker behandlas talområdet 0–10 i samtliga läromedel, men endast i två läromedel (SM och PM) behandlas talområdet 0–20. I samtliga 1B-böcker behandlas talområdet 0–100, vilket innebär att endast i 1B-böcker behandlas större talområden, vilket speglar att 1B bygger på 1A-boken. Ett intressant fynd är att *kommutativa räknelagen* introduceras i ett läromedel (FM) och att både subtraktion och addition med tre termer behandlas i tre av läromedel (FM, SM och PM). Ett andra fynd är att läromedlet EM behandlar talkamrater inom talområdet 1–10 enskilt, vilket innebär taluppdelning inom talområdet. Ett tredje fynd är att läromedlet PM behandlar *taluppdelning* genomgående i B-boken.

5.4.2 Progression i lärarsvar

Enligt 27 lärarsvar (se diagram 4) anser 63% av lärare att läromedlen som används i undervisningen har en tydlig *progression* med återkommande upplägg och struktur. Runt 26% av lärarna angav i lärarsvaren att innehållet i läromedlen behöver kompletteras med andra extrauppgifter, kopieringsunderlag och stenciler. Det innebär att dessa lärare anser att det delvis finns en *progression* mellan läromedlen, men att denna måste kompletteras med övrigt material för att uppfylla deras tolkning av en godtagbar *progression*. Cirka 11% av lärarsvaren anser att läromedlen har en rörig struktur eftersom det finns för mycket text, för många sidor eller att vissa uppgifter går för snabbt fram där elever inte får tillräckligt med träning inom ett visst område. Även där kompletterar en del lärare med utskrifter för att ge elever med färdighetsträning inom en del områden.



Samtliga muntliga intervjusvar hos fyra lärare anser att de föredrar att arbeta efter det upplägget och strukturen som behandlas i innehållsförteckningen, men att läromedel ofta kan gå för snabbt fram. Respektive muntliga intervjusvar antar att läromedel som används utgår ifrån Lgr 22 (Skolverket 2022b) och upplägget enligt kommentarmaterialet för Lgr22 (Skolverket 2022a). *Lärare 1* anser att de flesta skolor har begränsade ekonomiska resurser och har därför inte möjlighet att välja läromedel, vilket gör det extra viktigt att lärare anpassar undervisningen med kompletterande uppgifter från webben eller samarbeta med lärarkollegor på skolan. *Lärare 3* anser att läromedel som tillåter elever att få öva och pröva mycket i form av extramaterial som hör till läromedlet är fördelaktigt, eftersom det ger alla elever lika möjligheter att lyckas.

> Jag tycker faktiskt att läromedlet förhåller sig till kursplanen i matematik, men inom vissa områden är det alldeles för få uppgifter som behandlas. Däremot tycker jag att det är jättebra med lärarweb där jag kan visa mattefilmer och skriva ut extramaterial som jag kan använda på mina lektioner. (Lärare 3)

Lärare 2 anser att elever behöver få möjlighet till mer repetition i form av färdighetsträning för att högre *progression* ska nås. *Lärare 4* anser att läromedlet är tillräckligt för att eleverna ska få med sig nödvändiga kunskaper och uppnå en *progression*.

> Läromedlet som vi använder har ett bra upplägg med ett heltäckande innehåll. Jag tycker att eleverna får med sig de kunskaper de behöver och mer därtill. Dessutom är det ett inspirerande läromedel med många vardagsnära exempel. För elever som behöver brukar jag låta använda elevmaterial som finns på lärarwebben, då får eleverna jobba med räknandet i egen takt och skrivmomentet försvinner. (Lärare 4)

Lärare 4 svarade att det är viktigt att läromedlet är inspirerande och knyter an till elevernas vardag och intresse. Digitala resurser betonades då läraren ansåg att det i allmänhet passar alla elever och i synnerhet de elever som har en utmaning med skrivande för att fokus på matematikfärdigheter. För att maximal *progression* ska uppnås anser läraren att det är viktigt med rätt stöd och vägledning (*scaffolding*), samtidigt som god arbetsro ger alla elever möjlighet bättre koncentration och fokus. Ett exempel är att använda en timer där eleverna får arbeta enskilt och sedan gå igenom de mer utmanade uppgifterna gemensamt.

6 Slutsats

Denna studie har undersökt förutsättningar för *begreppsbildning* i läromedel och hur dessa medieras av lärare. *Representationsformer* som underlättar förståelsen av matematiska begrepp i form av visuella stöd förekom i samtliga läromedel, men även bland dessa förekom en variation i form av illustrationer och frekvens. Studiens resultat har klargjort att förutsättningar för att bygga upp *matematikspecifik begreppsförståelse* förekommer i de analyserade läromedel. Begrepp som addera och subtrahera används i samband med visuella bilder som demonstrerar betydelse av termerna samt hur en addition och subtraktion kan se ut. Det kunde exempelvis vara en bild på 3 fåglar som får sällskap av 4 fåglar till och motsvarar uttrycket $3 + 4 = 7$ eller 7 fåglar på en gren där 3 fåglar flyger i väg och motsvarar uttrycket $7 - 3 = 4$. Denna typ av demonstrerande bilder ger en direkt representation av räknesättet vilket medierar förståelsen av räknesättet. Utformning av representation varierar i de olika läromedlen. Lärarna svarade att de använder material som underlättar förståelsen av *matematikspecifika begrepp* och *räknemetoder* som liknar de *representationsformerna* som förekommer i läromedlen. Några likheter är kuber, tallinje och pengar. Vad gäller *matematikspecifika* begrepp är de mest frekventa begreppen 'ental' och 'tiotal' i tre läromedel. Medan begreppen 'subtrahera' och 'många' förekommer mest frekvent i ett läromedel specifikt.

I lärarsvaren framgår att läromedlet påverkar lärares upplägg och utformning av undervisning vilket innebär att läromedel har en viktig roll i matematikklassrummet. I lärarsvaren framkommer det att lärare använder direkta exempel ur läromedel för att mediera innehållet för eleverna vilket är ett tillfälle att modellera *räknemetoder* och förtydliga *matematikspecifika begrepp* kopplat till räknemetoderna inom området addition och subtraktion. Det fanns även en viss variation bland de *matematikspecifika begreppen* som framställdes i läromedel och de begrepp som lärare använder vilket kan bero på att de *matematikspecifika begreppen* som används i praktiken är mer talspråkliga. Vardagliga terminologierna 'plus' och 'minus' användes till exempel mer frekvent av lärare medan i läromedel framställdes ämnesspecifika terminologierna 'addition' och 'subtraktion' i högre utsträckning.

7 Diskussion

I detta kapitel diskuteras empirin utifrån de frågeställningar som ställts kring studiens syfte. Under varje avsnitt diskuteras studien utifrån tre områden som utgör en summering, koppling till tidigare forskningar och slutligen didaktiska implikationer i förhållande till empirins användbarhet samt idéer på vidare forskning.

7.1 Summering

Syfte med denna studie är att undersöka läromedel som behandlar addition och subtraktion i årskurs 1, vilket har analyserats utifrån en innehållsanalys och intervju-/enkätsvar. Vi utformade två frågeställningar för att få fram hur *representationsformer*, *matematikspecifika begrepp* och *räknemetoder* framställs i läromedel. Följande frågeställningar användes för att undersöka forskningsområdet i denna studie:

- **Hur framställs matematikspecifika begrepp och representationsformer i *läromedel* inom området addition och subtraktion i årskurs 1?**
    - *Representationsformer* som förekommer i läromedel är främst laborativa material (som pengar, kuber, leksaker, counters), fingrar/händer och visuella stöd (som räknestreck och prickar)
    - *Matematikspecifika begrepp* som förekommer i läromedel är främst ’ental’, ’tiotal’, ’subtrahera’, ’addera’, ’sammanlagt’, ’summa’, ’skillnad’, ’kvar’ och ’saknas/fattas’
    - *Räknemetoder* som analyserats förekommer nästan i alla läromedel
        - Kommutativa räknelagen framställs i 2 av 4 läromedel
        - Associativa räknelagen framställs i samtliga 4 läromedel
        - Taluppdelning framställs i 3 av 4 läromedel
        - Öppna utsagor framställs i 3 av 4 läromedel
        - Överslagsräkning framställs i 2 av 4 läromedel

- **Hur arbetar *lärare* med matematikspecifika begrepp och representationsformer i förhållande till de läromedel som används inom området addition och subtraktion i årskurs 1?**
    - *Representationsformer* framställs av lärare främst som laborativa material (som kuber, spel, pengar och counters) och visuella stöd (som tallinje och talkort)

- *Matematikspecifika begrepp* framställs av lärare främst som ’summa’, ’term’, ’differens’, ’skillnad’, ’lägg till’, ’plus’ och ’minus’
- *Räknemetoder* som framställs används på olika sätt av lärare:
  - Kommutativa räknelagen framställs via laborativa material, spel och exempel från läromedel
  - Associativa räknelagen framställs främst via laborativa material, spel och exempel från läromedel, men 1 lärare anger att hen inte alls lär ut denna räknelag i årskurs 1
  - Taluppdelning framställs via laborativa material och spel
  - Öppna utsagor framställs via laborativa material, spel och fokus på begreppsförståelse
  - Överslagsräkning framställs främst via laborativa material och spel, men 10 lärare anger att de inte lär ut detta i årskurs 1

För att sammanställa resultatet undersökte vi även *progressionen* mellan läromedel 1A och 1B, vilket har kompletterats med lärares uppfattning i följande summering:

- Läromedel 1A och 1B där progression granskats (se bilaga 4 och 5):
  - Samtliga 1A och 1B-böcker behandlar talområdet 0-10 inom addition och subtraktion
  - Samtliga 1B-böcker behandlar talområdet 0-20 och 0-100 inom addition och subtraktion
  - Två 1A böcker behandlar talområdet 0-20 inom addition och subtraktion

- Lärares uppfattning om progression baserade på 27 lärarsvar:
  - 17 (63%) anser att en tydlig progression i läromedel finns
  - 7 (26%) anser att progressionen i läromedel behöver fyllas ut med andra uppgifter
  - 3 (11%) anser att progressionen i läromedel inte är tydligt

Olika material och metod har använts i denna studie för att besvara frågeställningarna, nämligen en innehållsanalys, intervjuer och enkäter. Fyra läromedel har analyserats utifrån ett analysschema och urval av 27 lärarsvar har avkodats utifrån teman *representationsformer*, *matematikspecifika begrepp* och *räknemetoder* som framställs i läromedel. Analysschemat utvecklades efter fem teoretiska ramverk för att analysera läromedel och lärares svar om läromedel, vilket möjliggör generaliserbarhet av denna studie. De fem teorier som tillämpats i analysen av empirin är: *medierande resurser*, *tankeredskap/begreppsbildning*, *räknemetoder*, *verbalisering* och *scaffolding*.

Det är värdefullt att utvärdera studiens generaliserbarhet och eventuella felkällor eftersom vi kan identifiera empirins användbarhet. Vilket i denna undersökning beror i hög grad på vilka läromedel som används i undervisningen. Om andra läromedel än exempelvis EM, FM, SM och PM använts hade även resultaten kunnat se annorlunda ut. I denna undersökning var det uppenbart att majoriteten av lärare, enligt lärarsvaren svarade att de främst använde läromedel FM, följt av SM. Lärares preferenser och användning av ett specifikt läromedel kan därmed påverka resultatet och har en betydelse för begreppsbildning. Analysmetoden kan i denna studie generaliseras för tillämpning vid granskning av andra läromedel än just de som behandlats. Ytterligare faktorer som enligt de muntliga intervjusvaren framgår att lärares yrkeserfarenhet inom matematikundervisning kan vara en indikation på lärares självständighet när det kommer till användning av lärarhandledningar mot att skapa egna material för undervisningsområdet. Det framgår även att lärares generella inställning kan återspegla användningen av läromedel och i vilken utsträckning den används. För att studien ska få en rättvis bedömning användes ett analysschema, vilket möjliggjorde att empirin kunde analyseras på ett överskådligt och detaljorienterat sätt. Resultatet visar att det finns flera likheter i *representationsformer* där kuber, tallinje, pengar och prickar är vanligt förekommande, medan begreppen 'addera', 'subtrahera', 'ental' och 'tiotal' framställs flitigt i samtliga läromedel. Det som skiljer läromedlen åt är *räknemetoder* som i vissa läromedel framställs i hög respektive låg utsträckning där endast ett fåtal uppgifter behandlas.

En central aspekt är att de senaste utgivna läromedel mäts mot den senaste reviderade läroplanen Lgr 22 (Skolverket 2022b). En senare reviderad läroplan kan också påverka hur resultaten generaliseras till olika sammanhang och skolor. Det som ändå går att generalisera utifrån empirin är att matematik är ett abstrakt ämne som ofta behöver konkretiseras i form av visuella representationer och material, särskilt för elever i de lägre årskurserna i grundskolan. Även om matematiken har många olika uttrycksformer i form av siffror, symboler och andra representationer, är det avgörande att elever lär sig att tolka och koppla samman begreppen med deras betydelse med såväl vardagsanknutna som ämnesspecifika begrepp. Det är också betydande att eleverna inte ska bli alltför beroende av de konkreta materialen, eftersom målet med matematik är att elever ska kunna generalisera sina kunskaper med hjälp av inre tankeredskap. På sikt är matematiska färdigheter viktiga verktyg i elevernas vardag och framtid, eftersom många aspekter av samhället är beroende av matematik, inklusive vetenskaplig forskning, statistik, infrastruktur och ekonomi. Detta understryker vikten av en stark matematikutbildning för att förbereda eleverna för en framgångsrik framtid.

7.2 Diskussion av resultaten i relation till tidigare forskning

I denna studie har flera områden inom addition och subtraktion i läromedel undersökts. De områden som har sammanställts i föregående kapitel om resultat/analys utgår ifrån teorier som skapat analysverktyg för att lyfta fram relevanta teman för vår studie. Dessa fyra teman som är (1) *representationsformer*, (2) *matematikspecifika begrepp*, (3) *räknemetoder* och (4) *progression i läromedel*.

Språket har en avgörande roll i matematikklassrummet, vilket framgår i tidigare studier (Bergvall 2016, Dyrvold 2020, Segerby 2017). Matematikämnet har ett eget ämnesspråk som består av egna regler och uttryck i form av bilder, skrift och symboler. Dessa uttrycksformer kan uppfattas som abstrakt för många elever. Läromedel är enligt forskning (Lepik 2015, van den Ham & Heinze 2018) avgörande för skolans matematikundervisning eftersom de används som medel att implementera läroplanen.

I resultatet synliggörs **räknemetoder** i addition och subtraktion i form av flera **representationsformer** för att hjälpa elever visualisera de olika räknesätten. Dessa *representationsformer* framställs som *matematikspecifika begrepp* kopplat till såväl muntliga som skriftliga uttryck. Laborativa material framställs i såväl läromedel som av lärare för att hjälpa elever att visualisera räknemetoder i addition och subtraktion. De *representationsformer* som framställs i både läromedel och av lärare är laborativa material, counters, tallinje, prickar och hundratavla. *Representationsformer* i form av fysiska artefakter och bilder är enligt forskning (Dyrvold 2020) avgörande för elevers inlärning. Engvall (2013) framhäver vikten av visuella *representationsformer* och konkreta material för att underlätta elevernas inlärning inom matematik. Enligt hennes synsätt är det avgörande att inte enbart fokusera på att träna eleverna att memorera procedurer, utan även att lägga vikt vid att utveckla deras lösningsstrategier och algoritmräkning. Engvall (2013) poängterar vikten vid att undervisningen inte ska uteslutet handla om att träna elever på att memorera procedurer, utan också fokusera på att utveckla elevers lösningstrategier om algoritmer i addition och subtraktion.

I resultatet synliggörs **räknemetoderna** inom området addition och subtraktion utifrån **begreppsbildning** och **begreppsförståelse**. För att elever i F-3 ska lära sig addition och subtraktion behövs förklaring och användning av både vardagliga och ämnesspecifika ord som förekommer i matematik. De begrepp som används i såväl läromedel som av lärare är summa och skillnad. I samband med användning av laborativa material visualiseras positionssystemet där ental och tiotal framställs för att elever ska få förståelse för minnessiffra när det kommer till arbete med tvåsiffriga tal. Forskare (Bergvall 2016, Engvall 2013) understryker att elever på grundskolan behöver särskilt stöttning från lärare för att få förståelse för samt användning av de olika räknemetoder och strategierna i matematik. Lepik (2015) betonar även att stöttningen behöver ske i form av både vardagliga som ämnesspecifika begrepp för att elever ska befästa kunskaper i matematikämnet. Det är även avgörande att elever får resonera och samtala om olika lösningsstrategier eftersom det enligt forskning (Segerby 2017) hjälper elever att både förstå och använda de *matematikspecifika begreppen*. Forskare (Segerby 2017) framhåller att representationsformer ska användas för att hjälpa elever förstå sambanden mellan begrepp och de semiotiska resurserna som tillämpas i undervisningen. Bergvall (2016) betonar matematiskt ämnesspråk som en semiotisk resurs, vilket inkluderar skrift, bild och symboler. Hon poängterar att ämnesspråket varierar beroende på matematikens olika områden, såsom algebra, statistik, geometri och aritmetik.

I resultatet synliggörs **progression** utifrån talområdet 0-100 i årskurs 1. Majoriteten av respondenterna (63%) svarade att de såg en tydlig progression i läromedlen, medan 11% av respondenterna svarade tvärtom att de inte såg en tydlig progression. Forskning (Lepik 2015, van den Ham & Heinze 2018) visar att läromedel används som ett undervisningsverktyg just för att det har ett kulturellt värde där läroboken används utifrån tradition för att medla läroplanen. Enligt forskare (Lepik 2015) använder många lärare läroboksserier som bygger på varandra i matematikundervisningen, vilket innebär att byte av läromedel är sällsynta. Forskningen (Lepik 2015) visar även att läromedel inte används utifrån sin fulla potential eftersom flera lärare låter eleverna arbeta enskilt med fokus på övningsuppgifter i läromedlet. Detta understödjer Engvalls (2013) forskning om att många lärandeverksamheter fokuserar på procedurinlärning, vilket innebär att eleverna inte får möjlighet att resonera och kommunicera matematiken.

Vårt resultat visar att tidigare studier stärker vår analys där vi anser att elever behöver få möjlighet att utnyttja läromedlen fullt ut. Läromedel har således en central roll i matematikundervisningen och det är lärare som väljer vad som ska läras ut utifrån de läromedel som används och vilka hjälpmedel som ska användas. Även om läromedel är utformade att medla läroplanen kan det inte förutsättas att undervisningen leder till att eleverna lär sig matematikspecifika begrepp, hur representationsformer används och vilka räknemetoder som är lämpliga att använda inom området addition och subtraktion. För att progression i matematik ska nås ligger det i lärares arbete att möjliggöra att matematikklassrummet innefattar resonerande och samtal.

7.3 Didaktiska implikationer

Didaktiska implikationer i denna studie är vikten av lärares insikt och medvetenhet vid arbete med matematikläromedel. Lärares medvetenhet kring val av läromedel och medieringen av dessa är av största vikt för elevers lärande. Matematikläromedel kan ge förutsättningar för lärande och färdighetsträning, men det är lärarens roll och didaktiska val i att belysa och förmedla matematiska begrepp och stötta upp för att läromedlen ska fylla sin funktion. Ansvaret för elevers lärande ligger hos läraren och med denna studie vill vi synliggöra för lärare hur analys av läromedel kan göras för att medla innehållet till eleverna. Vi vill även med denna studie lyfta fram vikten av utvärdering och anpassning av läromedel ska ske efter elevgruppens behov genom att belysa viktiga matematiska begrepp och räknemetoder.

Läraren har således en central roll i att förmedla innehållet och stödja elevernas förståelse och bidra till deras kunskapsutveckling. Det är läraren som har makten att utforma undervisningen och bestämma vilka begrepp som ska framhävas, och detta har en direkt påverkan på elevernas utveckling av fördjupade kunskapen inom matematik. De erfarenheter och pedagogisk kompetens en lärare har påverkar valet av läromedel och hur innehållet levereras.

Utifrån denna studies resultat är det tydligt att lärare bör göra medvetna val när de utvärderar, anpassar och kompletterar sina läromedel i praktiken. Specifikt, när det gäller matematikundervisning, är addition och subtraktion grundläggande för att bygga upp algebraiska färdigheter och främja avancerad matematisk utveckling. Det är dock viktigt att säkerställa att eleverna inte blir alltför beroende av materialet och att användningen av konkreta resurser och visuella hjälpmedel sker på ett varierande sätt och trappas ner. Detta bidrar till en mer mångsidig och effektiv inlärningsmiljö som övergår i huvudräkning.

Läromedel utgör böcker men det är läraren som måste förstå tanken och idén bakom böckerna för att leda elevernas lärande och ta vara på de möjligheter och förutsättningar som ges i läromedel. Läromedlen kan och ska anpassas efter den aktuella elevgruppen. Denna insikt kommer vi ha med oss som nyexaminerade lärare för att ta tillfällen som ges i akt så läromedel kan uppfylla den funktion de är avsedda att fylla.

7.3.1 Vidare forskning

Vidare forskning inom området som kan bygga på denna studie kan utgöra en läromedelsanalys i förhållande till Lgr22 (Skolverket 2022b) i årskurserna 1–3. En undersökning som jämför läromedlens matematiska struktur och innehåll i förhållande till den svenska läroplanens kursmål och kunskapskriterier samt hur det matematiska språket och fördjupas från årskurs 1–3. Kontinuitet finns i läroplanens kursplaner och därför skulle en undersökning av progressionen och fördjupning i matematikläromedel vara av intresse för att undersöka om denna återspeglas i innehållet. En sådan studie kan fördjupa förståelsen för de förutsättningar och lärandemöjligheter som finns i läromedlen då denna studie inneburit en viss tidsbegränsning i material och metodval.

8 Käll- och litteraturförteckning

Andersson, M. (2005). *Landet Matematica.* Stockholm. Natur & Kultur Läromedel.

Bergvall, I. (2016). *Bokstavligt, bildligt och symboliskt i skolans matematik: En studie om ämnesspråk i TIMSS*. Diss. Uppsala universitet. http://uu.diva-portal.org/smash/get/diva2:919791/FULLTEXT01.pdf

Bryman, A. (2018). *Samhällsvetenskapliga metoder*. Tredje upplagan. Stockholm: Liber

Dyrvold, A. (2020). Relations between semiotic resources in mathematics tasks: a source of students' difficulties. *RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION*, VOL. 22, NO. 3, 265–283. https://doi.org/10.1080/14794802.2019.1689160

Engvall, M. (2013). *Handlingar i matematikklassrummet: En studie av undervisningsverksamheter på lågstadier då räknemetoder för addition och subtraktion är i fokus*. Diss: Linköpings universitet. http://liu.diva-portal.org/smash/get/diva2:660675/FULLTEXT01.pdf

Karlsson, N. & Kilborn, W. (2015). *Matematikdidaktik i praktiken. Att undervisa i årskurs 1-6*. Malmö: Gleerups Utbildning AB

Kinard, J. T. & Kozulin, A. (2012). Undervisning för fördjupat matematiskt tänkande. Lund: Studentlitteratur

Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan.* Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning. http://www2.math.uu.se/~kiselman/termer12.pdf

Lepik, M. (2015). Analyzing the use of textbook in mathematics education: the case of Estonia. *ACTA PAEDAGOGICA VILNENSIA*, 35, 90-102. http://dx.doi.org/10.15388/ActPaed.2015.35.9193

Lo, M. L. (2014). *Variationsteori: för bättre undervisning och lärande*. Lund: Studentlitteratur

Olén, S. (2016). *Mattekollen. Attityden till matte – Ett hinder för svensk konkurrenskraft?* Västsvenska Handelskammaren. https://www.vastsvenskahandelskammaren.se/globalassets/formular/kompetensforsorjning/rapporter/mattekollen.pdf

Segerby, C. (2017). *Supporting mathematical reasoning through reading and writing in mathematics - Making the implicit explicit*. Diss. Malmö University. https://mau.diva-portal.org/smash/get/diva2:1404511/FULLTEXT01.pdf

Svenska Akademiens Ordlista: SAOL. (2023). Svenska Akademiens Ordböcker. https://www.svenska.se/saol [Hämtat november 2023]

Skolverket (2022a). *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik - Grundskolan.* https://www.skolverket.se/getFile?file=9790

Skolverket (2022b). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2022: Lgr 22.* https://www.skolverket.se/getFile?file=9718

Stridsman, S. (2014). *Åtta av tio lärare hinner inte granska läromedel*. Skolvärlden, 19 november. https://skolvarlden.se/artiklar/atta-av-tio-larare-hinner-inte-granska-laromedel

Tivenius, O. (2015). *Uppsatsens inre liv*. Lund: Studentlitteratur

van den Ham, A-K. & Heinze, A. (2018). Does the textbook matter? Longitudinal effects of textbook choice on primary school students' achievement in mathematics. *Studies in Educational Evaluation*, 59, 133–1. https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2018.07.005

van Oers, B. (2014). Scaffolding in Mathematics Education. In: S. Lerman (ed.)*, Encyclopedia of Mathematics Education*, 759-820. https://doi-org.till.biblextern.sh.se/10.1007/978-94-007-4978-8_136

Vygotskij, L. S. (1999). *Tänkande och språk*. Göteborg: Daidalos

Bilaga 1. Samtyckesblankett / information

Hej!
Detta är en samtyckesblankett och informationsblad om vår studie.

Vi vill i vår självständiga arbete 1 på 15hp undersöka hur lärare använder läromedel i sin undervisning inom området addition och subtraktion i årskurs 1. De läromedel som vi vill undersöka är: *Eldorado matte, Favorit matematik*, *Singma matematik* och *Pixel matematik*.

Vi söker deltagare som vill genomföra en muntlig intervju om läromedel. Intervjun förväntas ta runt 30 minuter. Om du har möjlighet att bidra till studien ber vi dig att ge ett samtycke till intervjun nedan.

Bra att känna till är att intervjun är helt frivillig och du kan närsomhelst välja att avbryta deltagandet. Intervjusvaren kommer att sammanställas som ett resultat i vår C-uppsats, där alla känsliga uppgifter (namn, ålder, kön, skola) anonymiseras. Endast relevanta svar från intervjun kommer att lyftas fram i uppsatsen, vilket grundas i studiens syfte och frågeställning.

Jag (namn): ....godkänner att delta i intervjun.

Underskrift: ....

Datum: ....

Tack på förhand!

Bilaga 2. Intervjufrågor

Bakgrund:

1. Hur många år har du undervisat matematik i F-3?
2. Vilket *läromedel** använder du i din matematikundervisning?
3. Hur länge har du arbetat med *läromedlet**?

Erfarenhet/praxis:

4. Hur använder du *läromedlet** när du lär du ut området addition och subtraktion i årskurs 1?
5. Vilka verktyg (exempelvis kuber, hundratavla, tallinje) använder du för att lära elever om addition och subtraktion i årskurs 1?
6. Vilka ord inom addition och subtraktion använder du för att lära ut begreppsförståelse i årskurs 1 (exempelvis *lägga till*, *skillnad*, *summa*)?
7. Hur lär du ut de olika räknemetoderna i addition och subtraktion?
    a. Kommutativa lagen (ordningen spelar ingen roll)
    b. Associativa lagen (tre eller fler termer)
    c. Taluppdelning (talkamrater, exempelvis tior)
    d. Öppna utsagor (fylla i luckor)
    e. Överslagsräkning (avrundning)

Uppfattning/lärdom:

8. Anser du att *läromedlet** har en tydlig progression från A till B-boken samt för respektive årskurser från förskoleklass till årskurs 3?
9. Vad anser du är avgörande vid val av lämpliga läromedel i matematikundervisning?

**Eldorado matte, Favorit matematik, Pixel matematik* eller *Singma matematik.*

Bilaga 3. Analysschema av lärarsvar

Filtrerad från högst till lägst poäng. Flervalsalternativ som är ikryssat i tabell *a* utgör denna rankning av de mest förekommande *representationsformer* som lärare i denna studie använder.

Tabell a: Lärares val av representationsformer	Poäng	Procent
multibas (en, tio, hundrakub)	23	19,8%
tallinje	23	19,8%
pengar	17	14,7%
hundratavla	15	12,9%
talkort	13	11,2%
counters	9	7,8%
tiobricka	6	5,2%
multikub (centi, lego, plusplus)	6	5,2%
spel	3	2,6%
Övrigt	1	0,9%
Counters = plockmaterial "plockisar": *knappar, stickor, blomma, tandkräm, nycklar, boll, kulor, koppar, kartong, pärlor, kastanjer, klädnypor, sudd, bönor, ätbara ting, djur, ägg, leksak*	**116**	
Övrigt*: cuisenairestavar, räknestreck, talblock (numicon), stickor (en, tiobunt), händer+fingrar, balansvåg*		

Filtrerad från högst till lägst poäng. Flervalsalternativ som är ikryssat i tabell *b* utgör denna rankning av de mest förekommande *matematikspecifika begrepp* som lärare i denna studie använder.

Tabell b: Lärares val av matematikspecifika begrepp	Poäng	Procent
summa	27	13,9%
differens	26	13,4%
term	25	12,9%
skillnad	24	12,4%
lägg till	22	11,3%
plus	10	5,2%
minus	10	5,2%
tillsammans	9	4,6%
addition	4	2,1%
addera	4	2,1%
subtraktion	4	2,1%
subtrahera	4	2,1%

sammanlagt	4	2,1%
lägg ihop	3	1,5%
ta bort	3	1,5%
kvar	2	1,0%
jämför	2	1,0%
likhetstecken	2	1,0%
större än	2	1,0%
mindre än	2	1,0%
lika mycket	1	0,5%
öka	1	0,5%
minska	1	0,5%
ental	1	0,5%
tiotal	1	0,5%
Total poäng	**194**	

Filtrerad från högst till lägst poäng. Flervalsalternativ som är ikryssat i tabell *c* utgör denna rankning av de mest förekommande undervisningsstrategier av olika *räknemetoder* i området addition och subtraktion som lärare i denna studie använder.

Tabell c: Lärares val av räknemetoder	**Kommutativa**	**Associativa**	**Taluppdelning**	**Öppna utsagor**	**Överslagsräkning**
Laborativa material och spel	16	12	23	9	8
Exempel från läromedel	9	10	7	7	2
Visar på tavlan	7	7	8	4	5
Utforskar i mindre grupper	7	5	4	3	1
Fokus på begreppsförståelse	0	0	0	14	5
Helklassdiskussion	4	0	0	5	3
Färdighetsträning (stenciler)	0	0	2	6	4
Lärs inte ut i årskurs 1	0	1	0	0	10
Talmönster, del av helhet, talcirkel	1	2	3	0	0
Estetisk lärandeprocess	0	0	6	0	0
Fingrar och händer	0	0	6	0	0
Balansvåg	0	0	0	4	0
Använder verkliga exempel	3	0	1	0	0

Skapar egna räknehändelser	1	0	1	2	0
Laborativa material: *kuber, counters, pengar, mattehus, memory, korlek etc.*	**48**	**37**	**61**	**54**	**38**
Tavlan: *talkamrater, tiokamrater, grupperar om ordningen, siffror, blankrum*					
Exempel från läromedel: *uppgift, bild, film, lärarweb*					
Verkliga exempel: *antal elever i klassen*					
Estetisk lärandeprocess: *dans, sång, måla & rita*					
Begreppsförståelse: *likhetstecken [=] inom alla räknemetoder. Vid överslagsräkning används begreppen ungefär, rimligt, avrunda*					

Filtrerad från högst till lägst poäng. Alternativet som är ikryssat i tabell *d* utgör denna rankning av svar om *progression* utifrån läromedel som lärare i denna studie använder.

Tabell d: Lärares uppfattning om progression i läromedel	Poäng	Procent
JA - Det finns en tydlig struktur/återkommande upplägg	17	*63,0%*
NEJ - Ostrukturerat innehåll, mycket text, många sidor, vissa delar går fort fram	3	*11,1%*
VARKEN ELLER - Innehållet behöver kompletteras med andra uppgifter, mer färdighetsträning	7	*25,9%*
	27	

Bilaga 4. Granskade läromedel

Läromedel där begrepp, representationsformer och räknemetoder har granskats:

- ◊ Agardh, P. & Rejler, J. (2017). *SINGMA matematik 1B Övningsbok.* Första upplagans åttonde tryckning. Stockholm: Natur & Kultur
- ◊ Alseth, B., Arnås, A-C., Kirkegaard, H., Røsseland, M. (2015). *PIXEL MATEMATIK 1B Grundbok med digital färdighetsträning*. Andra upplagans tredje tryckning. Stockholm: Natur & kultur
- ◊ Haapaniemi, S., Mörsky, S., Tikkanen, A., Vehmas, P. & Voima, J. (2018). *Favorit matematik 1B Elevpaket – Tryckt bok + Digital elevlicens 12 mån.* Upplaga 2:5. Lund: Studentlitteratur
- ◊ Olsson, I. & Forsbäck, M. (2015). *ELDORADO MATTE 1B Grundbok.* Andra upplagans sjätte tryckning. Stockholm: Natur & Kultur

Kompletterande läromedel där progression har granskats:

- ◊ Agardh, P. & Rejler, J. (2016). *SINGMA matematik 1A Övningsbok.* Upplaga 1. Stockholm: Natur & Kultur
- ◊ Alseth, B., Arnås, A-C., Kirkegaard, H. & Røsseland, M. (2015). *PIXEL MATEMATIK 1A Grundbok med digital färdighetsträning*. Andra upplagans andra tryckning. Stockholm: Natur & kultur
- ◊ Haapaniemi, S., Mörsky, S., Tikkanen, A., Vehmas, P. & Voima, J. (2012). *Favorit matematik 1A Elevpaket – Tryckt bok + Digital elevlicens 12 mån*. Upplaga 1:1. Lund: Studentlitteratur
- ◊ Olsson, I. & Forsbäck, M. (2008). *ELDORADO MATTE 1A Grundbok*. Första upplagans fjärde tryckning. Stockholm: Natur & Kultur

Bilaga 5. Analysschema av läromedel

Endast sidor ur analyserade kapitel i läromedel 1B med koppling till räknemetoderna i addition och subtraktion har analyserats. I analysen benämns samtliga läromedel med dess förkortningar *EM*, *FM*, *SM* och *PM*.

Tabell *e-h* avser analys av läromedel 1B som visar identifiering av räknemetoder i analyserade kapitel. I varje tabell anges sidhänvisning, där de blåmarkerade sidhänvisningarna inte ingår i urvalet av analyserade kapitel.

Tabell e: Analys av räknemetoder i läromedel EM

EM	*Urval av analyserade kapitel: 7, 8, 10, 12*			
	Behandlas räknemetoden?	**Hur behandlas räknemetoden?**	**Hur framställs räknemetoden (ge exempel)?**	**Vilka sidor behandlar räknemetoden?**
Kommutativa lagen	Nej	Kan inte analyseras	Kan inte analyseras	Utanför analyserade sidor (s. 100)
Associativa lagen	Ja	Möjlighet till *associativa lagen*	3X=5	s. 127
Taluppdelning	Nej	Kan inte analyseras	Kan inte analyseras	Utanför analyserade sidor (s. 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109)
Öppna utsagor	Ja	*Öppna utsagor* i addition och subtraktion	34+___=30 och 64-___=61	s. 84
Överslagsräkning	Nej	Kan inte analyseras	Kan inte analyseras	Utanför analyserade sidor (s. 104, 105, 106, 107)

Tabell f: Analys av räknemetoder i läromedel FM

FM	*Urval av analyserade kapitel: 1, 2, 3, 5*			
	Behandlas räknemetoden?	**Hur behandlas räknemetoden?**	**Hur framställs räknemetoden (ge exempel)?**	**Vilka sidor behandlar räknemetoden?**
Kommutativa lagen	Ja	*Kommutativa lagen* i uttryck	30+20=___ och 20+30=___	s. 118, 119, 126
Associativa lagen	Ja	Addition med tre termer kan tolkas som *associativa lagen* då fler termer grupperas för att bilda tiotal.	5+5+1 och 5+6+5	s. 25, 55, 60, 61, 62, 63, 66, 67, 93
Taluppdelning	Ja	Dela upp talet 5, 6 och 7	5 delas i 3 +___	s. 7, 13, 15, 19, 58, 105, 109, 124
Öppna utsagor	Ja	*Öppna utsagor* med tre termer	3+2+___=12	s. 15
Överslagsräkning	Ja	Möjligheter till avrundning till närmaste tiotal.	9+1+6=___	s. 64, 66, 67, 68

Tabell g: Analys av räknemetoder i läromedel SM

SM	*Urval av analyserade kapitel: 1, 2, 5*			
	Behandlas räknemetoden?	**Hur behandlas räknemetoden?**	**Hur framställs räknemetoden (ge exempel)?**	**Vilka sidor behandlar räknemetoden?**
Kommutativa lagen	Ja	Textuppgift som behandlar addition där frukter kan adderas i godtycklig ordning, till exempel räkna från störst först	Textuppgift: *En apa har 7 bananer. Apan får 12 bananer till. Hur många bananer har apan nu?*	s. 24, 38

Associativa lagen	Ja	Bilda tio och addera. Gruppera två termer som bildar tiotal för att utföra enklare räkneoperation.	3+9+7=10+9	s. 28, 29
Taluppdelning	Ja	I boken delas talet 11 i termerna 1 och 5.	11+5=10+1+5	s. 23, 25, 26
Öppna utsagor	Ja	Som räkneoperation	5-____=3	s. 44, 45, 49
Överslagsräkning	Ja	Addition med tre termer kan framställa avrundning upp till närmaste tiotal. Avrundning kan även kopplas till *associativa lagen.*	5+9+9=	s. 28

Tabell h: Analys av räknemetoder i läromedel PM

PM	*Urval av analyserade kapitel: 9, 10, 13*			
	Behandlas räknemetoden?	**Hur behandlas räknemetoden?**	**Hur framställs räknemetoden (ge exempel)?**	**Vilka sidor behandlar räknemetoden?**
Kommutativa lagen	Nej	Kan inte analyseras	Kan inte analyseras	Utanför analyserade sidor (s. 84)
Associativa lagen	Ja	Taluppdelning för att sedan gruppera om med hjälp av *associativa lagen* till närmaste tiotal.	15+9=10+10+4. *Bryta ut ental och tiotal till 10 och fyra och sedan addera ett ental till 9.*	s. 29, 49, 50

Taluppdelning	Ja	Tal delas upp i tiotal och ental. Taluppdelningen av termer för lättare subtraktion.	Talet 26 delas upp i 2 tiotal och 6 ental.	s. 30, 31, 32, 48, 52, 53, 54, 55, 58, 59, 60, 103
Öppna utsagor	Nej	Kan inte analyseras	Kan inte analyseras	Kan inte analyseras
Överslagsräkning	Ja	Kan tolkas som *överslagsräkning*	Hitta effektiva sätt att räkna operationen: 16+8= ___+___+___= ___	s. 50, 51

Tabell *i* avser analys av läromedel 1B som visar identifiering av representationsformer. De analyserade sidorna utgår ifrån kapitel som analyserats om räknemetoder (se tabell e-h).

Tabell i: Analys av representationsformer i läromedel 1B

Representationsform	**EM**	**FM**	**SM**	**PM**
Pengar	6	12	-	17
Kuber	-	1	15	4
Tallinje	-	12	2	9
Fåror	11	-	-	-
Prickar	-	10	1	-
Ätbart	1	9	7	-
Tiobuntar	8	-	-	-
Djur	-	7	-	2
Leksak	1	6	2	4
Counters	2	-	4	-
X (okänd variabel)	4	-	-	1
Centikub	-	-	4	-
Händer/fingrar	3	-	-	-
Blomma	-	3	-	-
Kulram	-	-	-	3

Gren	-	2	-	-
Räknestreck	1	-	-	-

Tabell *j* avser analys av läromedel 1B som visar identifiering av matematikspecifika begrepp. De analyserade sidorna utgår ifrån kapitel som analyserats om räknemetoder (se tabell e-h).

Tabell j: Analys av matematikspecifika begrepp i läromedel 1B

Begrepp	**EM**	**FM**	**SM**	**PM**
tiotal	25	16	86	33
ental	12	6	85	34
subtrahera	1	37	12	4
många	17	32	23	15
sammanlagt	-	29	4	4
addera	1	19	18	9
mycket	7	18	-	9
summa	-	8	1	14
skillnad	3	-	13	2
saknas, fattas	2	11	6	-
kvar	2	10	5	6
addition	7	6	1	2
antal	6	4	7	4
subtraktion	7	8	3	1
tillsammans	2	1	-	-
differens	-	-	-	4
resten	-	4	-	-
ta bort	3	-	1	1

öka	1	-	-	-

Tabell *k* avser en jämförelse av progression som visar identifiering av talområde som behandlar addition och subtraktion. Analysen avser innehållsförteckningen i läromedel 1A och 1B.

Tabell k: Analys av progression i läromedel 1A och 1B

Läromedel 1A och 1B	**Talområde**	**FM**		**SM**		**EM**		**PM**	
Addition	*0-10*	A+B	*A* behandlar talområdet 0-12, kommutativa lagen, addition och subtraktion med tre termer, subtraktions-trappa och tiokamrater	A+B	Ingen anmärkning	A+B	*A* behandlar talkamrater i enskilda avsnitt: 2-5, 6, 1-6, 7, 8, 9, 1-10	A+B	*A* behandlar subtraktion med 3 termer. *B* behandlar taluppdelning. *A* och *B* behandlar addition med 3 termer.
	0-20	B		A+B		B		A+B	
	0-100	B		B		B		B	
Subtraktion	*0-10*	A+B		A+B		A+B		A+B	
	0-20	B		A+B		B		A+B	
	0-100	B		B		B		B	