NATALIA KARLSSON

Matematik i lärarutbildningen:
Studenters kunskaper i och uppfattningar om matematik

En forskningsrapport från MIL- och SKUM-projekten

WORKING PAPER 2015:4

södertörns högskola
SÖDERTÖRN UNIVERSITY

Förord

Under de senaste decennierna har såväl svenska som internationella undersökningar visat på svenska elevers bristande kunskaper i matematik. En konsekvens av detta är att de studenter som nu kommer till högskolan tillhör en generation som enligt TIMSS (2011) och PISA (2015) lyckats mindre bra med den matematik de läst i skolan. I undervisningen på lärarutbildningen på Södertörns högskola har vi konstaterat att många av dagens studenter har en procedurell och ytinriktad uppfattning om matematik och att de bygger sina kunskaper på formler som de inte alltid kan hantera. Denna uppfattning om ämnet gör det svårt för dem att utgående från dagens utbildningsramar uppnå rimliga mål i lärarutbildningen. Detta är bakgrunden till projekten SKUM och MIL.[1] Det övergripande syftet med de båda projekten har varit att bygga upp kunskaper som kan ligga till grund för en funktionell lärarutbildning. En sådan utbildning bör vila på vetenskaplig grund och vara väl anpassad till dagens studenter och deras möjligheter att tillgodogöra sig undervisningen på högskolan.

I den här rapporten presenteras resultaten från en diagnos om grundläggande aritmetik (taluppfattning) och algebra. Lärarstuderande med inriktning mot årskurs 4 till 6 fick diagnosen vid starten av sin första kurs i matematikämnets didaktik. Avsikten var att kartlägga studenternas styrkor och svagheter med avsikten att därefter planera en utbildning som var anpassad till deras förmågor och attityder till ämnet. Resultaten visar att de flesta av studenterna hade mer eller mindre allvarliga brister när det gällde att lösa enkla uppgifter. Det innebar i sin tur att de fick svårt att följa undervisningen på högskolan.

Undervisningen i matematikämnets didaktik handlar om att reda ut och diskutera olika strategier i matematikundervisningen och inte minst om hur man kan anpassa undervisningen till elevers olika förmågor och behov. En grundläggande förutsättning för att studier i matematikämnets didaktik ska

[1] SKUM-projektet (Studenters kunskaper i och uppfattning om matematik) genomfördes under 2014 och dess övergripande syfte var att analysera internationell didaktisk forskning rörande studenters kunskaper i och uppfattningar om matematik samt att bygga upp strategier för att effektivisera studenters studier i matematik på högskolan. MIL-projektet (Matematik i lärarutbildningen), som genomförts under 2015, har syftat till att skapa ett forskningsunderlag för vidare forskning om lärarstuderandes kunnande och förmågor. Båda projekten har letts av Natalia Karlsson, Institutionen för Naturvetenskap, Miljö och Teknik, Södertörns högskola.

fungera, är att studenterna själva kan uppfatta och förstå de matematiska begrepp som ingår i läroplanens (Lgr11) centrala innehåll för årskurs 4–6. I den här rapporten utreds i vilken omfattning sådana förutsättningar finns. Om så inte är fallet, gäller det att i utbildningen kunna hantera detta på ett funktionellt sätt. I slutet av rapporten finns några funderingar om detta.

Vad gäller etiska aspekter, så har studenterna gjort diagnosen anonymt. De resultat som redovisas i den här rapporten gäller för en grupp studenter på just den här högskolan, men de reaktioner jag fått från anda högskolor visar att även deras studenter har liknade problem. Resultaten från de här projekten ska utgöra en grund för att analysera studenters kunskaper i och uppfattningar om matematik och att mot denna bakgrund bygga upp forskningsbaserade didaktiska undervisningsmodeller som kan möta olika studenters behov av undervisning. Detta är en stor utmaning som är omöjlig att hantera på egen hand. Det här kräver ett kollegialt samarbete mellan ledning, forskare, lärare och inte minst ett samarbete med studenterna.

Natalia Karlsson
Södertörns högskola

Bakgrund

Under de senaste decennierna har såväl svenska som internationella utvärderingar visat på stora brister när det gäller svenska elevers matematikkunskaper. (TIMSS, 1999, 2003, 2007, 2011; TIMSS advanced, 1995, 2008; PISA, 2000, 2003, 2009, 2012, 2015). Orsakerna till elevernas tillkortakommanden är däremot mindre väl utredda. Jag kan emellertid konstatera att de satsningar som under de senaste decennierna gjorts för att kompetensutveckla lärare inte har lett till någon förbättring av elevernas resultat på TIMSS (2011) eller PISA (2015). En konsekvens av detta är att de studenter som nu kommer till högskolan tillhör en generation som enligt TIMSS och PISA lyckats mindre bra med sina studier i matematik. Jag kommer att utreda detta närmare i en senare rapport, men kan redan nu konstatera att de kunskaper flertalet av dagens studenter har i, och den uppfattning de har om, matematik gör det svårt för dem att utgående från dagens utbildningsramar uppnå rimliga mål i lärarutbildningen.

De nedslående resultat som svenska elever fått i matematik vid internationella jämförelser har lett till debatter och en rad utredningar. Jag vill här nämna DsU 1986:5, *En översyn av undervisningen i matematik inom skolväsendet,* som utfördes som en följd av resultaten på IEA1980 och SOU 2004:97, *Att lyfta matematiken,* som utfördes som en följd av resultaten på de första TIMSS och PISA undersökningarna. I SOU 2004:97 kan man bl.a. läsa att:

> Tillgången på utbildade lärare i matematik behöver öka både på kort och lång sikt. Många lärare som idag undervisar i matematik, från förskola till högskola, saknar eller har begränsad högskoleutbildning i matematik och/eller matematikdidaktik. (s. 12)
>
> Många lärare i matematik har inte någon gång under sin lärartid haft kompetensutveckling i matematik och/eller matematikdidaktik. (s. 12)

Ambitionen var att dessa undersökningar skulle leda till en förbättring av de svenska elevernas matematikkunskaper. ”Svenska elevers och studerandes resultat ska i framtiden vara ledande vid internationella jämförelser” skriver man i SOU 2004:97 (s. 13). Så är det inte. I en artikel i Svenska dagbladet, den 1 mars 2015, kunde man läsa:

> Resultaten i den stora internationella kunskapsmätningen hade för Sveriges del under 00-talet fallit stadigt, 2009 landade resultatet nära OECD-snittet. Fyra år senare kom alltså Pisa-raset. Politisk turbulens följde.
>
> Idag hyser Sveriges nya utbildningsminister inga större förhoppningar om ett stärkt resultat i den kommande mätningen och kallar de senaste Pisa-resultaten för ”skrämmande”.

En förutsättning för att en lärare ska kunna bedriva en meningsfull undervisning är att hon själv behärskar det ämnesinnehåll hon ska undervisa om. Men det räcker inte. Lärare som t.ex. undervisar i årskurs 4–6 måste också behärska den matematik som eleverna kommer att möta senare under sin utbildning, åtminstone i årskurs 7–9. I annat fall kan lärarna inte avgöra relevansen på längre sikt av det ämnesinnehåll de undervisar om, vilket i sin tur kan skapa bristande kontinuitet ur elevernas synvinkel.

Även om det är nödvändigt för en lärarstudent att ha sådana kunskaper i matematik som krävs för att som elev bli godkänd i årkurs 9, så är detta långt ifrån tillräckligt. För att kunna fatta viktiga beslut när det gäller planering, val av arbetsform och arbetssätt, metodik, individualisering mm. måste hon även kunna ta ett lärarperspektiv på det matematikinnehåll hon ska undervisa om. Detta kräver kunskaper i matematikämnets didaktik. En nödvändig förutsättning för att en student ska kunna tillgodogöra sig den ämnesdidaktik som erbjuds vid en lärarutbildning är att studenten vid kursstarten själv behärskar innehållet i grundskolans matematik såsom det beskrivs i kursplanen och utvärderas på nationella prov. På lärarutbildningarna finns det bara en begränsad tid för den undervisning som erbjuds, vilket kräver att lärarstudenten vid kursstarten åtminstone bör ha kunskaper motsvarande kraven i årskurs 9 i grundskolan.

Under mina föreläsningar och seminarier i matematikämnets didaktik ställer studenterna ofta frågor som visar på allvarliga missuppfattningar när det gäller den matematik som de undervisats i under de första sex åren på grundskolan. Många har också svårigheter med att uttrycka sig på ett begripligt sätt på tentamensfrågor. De räknar dessutom fel på enkla aritmetiska beräkningar.

I dag råder en stor brist på lärare som är behöriga att undervisa i matematik. Samtidigt räcker antalet studenter som söker till lärarutbildningen inte till för att fylla behovet av lärare. Det gäller därför att ge de studenter som antagits till utbildning ett sådant stöd att de, trots bristande kunskaper i, och mindre bra attityder till, ämnet matematik, kan genomgå utbildningen med nöjaktiga resultat.

Vad säger kursplan och forskning?

De krav som idag ställs på en lärare skiljer sig en hel del från tidigare krav. Sedan 2011 finns det inte längre några mål i kursplanen. Dessa ska lärarna själva formulera, något de enligt Linde (2000) inte är utbildade för. De flesta lärare har utbildats till att följa kursplanens mål inte att skriva dem. I stället för mål beskriver dagens kursplan undervisningens syfte. I kursplanen för matematik sammanfattas dessa syften i form av förmågor:

> Genom undervisningen i ämnet matematik ska eleverna sammanfattningsvis ges förutsättningar att utveckla sin förmåga att
>
> - formulera och lösa problem med hjälp av matematik samt värdera valda strategier och metoder,
> - använda och analysera matematiska begrepp och samband mellan begrepp,
> - välja och använda lämpliga matematiska metoder för att göra beräkningar och lösa rutinuppgifter,
> - föra och följa matematiska resonemang, och
> - använda matematikens uttrycksformer för att samtala om, argumentera och redogöra för frågeställningar, beräkningar och slutsatser (Skolverket, 2011).

Om förmågor

Nu inställer sig en central fråga, nämligen vad som avses med en förmåga. En förmåga att föra och följa matematiska resonemang är ju inte statisk. Förmågan utvecklas ju efter hand som elevernas kunnande utvidgas till nya områden. Förmågorna skiljer sig ju dessutom från område till område, beroende på vad man resonerar om och på vilket djup resonemanget sker. En annan intressant fråga är hur många av dagens aktiva lärare som på ett adekvat sätt kan tolka begreppet förmåga och kan omsätta detta i praktisk verksamhet.

Idén om att arbeta med förmågor i ämnet matematik kommer bl.a. från forskningssammanfattningen *Adding it up: Helping children learn mathe-*

matics. (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001). Här talar de om förmågorna i termer av Mathematical Proficiencies, som omfattar:

Conceptual understanding – förståelse av begrepp, operationer och samband.

Procedural fluency – förmåga att utföra beräkningar med variation, effektivt och korrekt.

Strategic competence – förmåga att formulera, representera och lösa matematiska problem.

Adaptive reasoning – förmåga till logiskt tänkande och reflektioner samt att kunna resonera och förklara.

Productive disposition – att se matematik som viktig, användbar och värd att studera. Detta handlar också om tilltron till den egna förmågan.

Författarna poängterar att det här inte handlar om ett antal separata förmågor utan att de är sammanvävda och snarare visar olika aspekter av ett matematikkunnande. Det är detta kunnande som karaktäriserar en elev som behärskar ämnet matematik och det är detta man bör sträva efter att utveckla i skolans matematikundervisning. Det här kräver en helt ny syn och en ny inriktning på lärares utbildning.

I en annan källa, *Kompetencer og matematiklæring,* framtagen på uppdrag av det danska undervisningsministeriet (Niss & Højgaard Jensen, 2002), redovisas en liknande syn, men man lägger till en ny aspekt, nämligen att det finns olika nyanser av en förmåga, eller en kompetens. Förmågorna kan nämligen se olika ut i olika åldrar och i olika situationer. Man menar att en förmåga eller kompetens kan betraktas ur tre aspekter: Täckningsgrad, aktionsradie och teknisk nivå.

- Täckningsgraden beskriver de olika aspekter som kompetensen täcker. När det t.ex. gäller argumentationskompetens, så har kompetensen hos den som kan föra en argumentation högre täckningsgrad än hos den som bara kan följa argumentationen.
- Aktionsradien beskriver de olika situationer och områden av matematiken som kompetensen omfattar. När det t.ex. gäller förmågan att formulera och lösa problem, kan man lösa samma problem algebraiskt, geometriskt eller grafiskt.
- Den tekniska nivån beskriver hur tekniskt avancerade situationer kompetensen omfattar, alltså vilka matematiska modeller en man behärskar och förmår använda vid problemlösning. En elev kan lösa ett

problem på en mycket basal aritmetisk nivå. En annan elev kan lösa samma problem på en algebraisk och mer avancerad nivå.

Det här innebär, att en förmåga inte är något statiskt och att det inte finns en förmåga i sig. En förmåga är alltid knuten till en kontext, den utvecklas ständigt och kan därför skilja sig avsevärt och i flera avseenden från elev till elev och från tid till annan. Vad man däremot kan slå fast är att en lärare måste kunna förstå vilka förmågor hennes elever bör utveckla och i vilken utsträckning de verkligen har gjort det. Detta måste vi utbilda våra lärarstuderande för att klara av.

Om kunskaper i matematik – Didaktikens kärnfrågor

Som lärarutbildare måste vi ha en adekvat syn på kunskap, på undervisning i matematik och på vad som krävs av en lärare i matematik. För ett par sekel sedan var didaktikens kärnfrågor: Vad, Hur och När. Detta tolkades som att det inte räcker för en lärare att veta *vad* eleverna ska lära sig. Hon måste också veta *hur* inlärningen kan gå till, helst med olika individanpassade metoder samt *när* det kan vara lämpligt att undervisa om innehållet i fråga. På senare år har man till detta lagt en fjärde kärnfråga: Varför. För den som inte vet *varför* eleverna ska lära sig ett visst matematikinnehåll, blir de tre övriga frågorna ofta meningslösa (Marton & Booth, 2000).

Det här innebär att det inte räcker att läraren själv kan lösa en typ av uppgift med hjälp av en viss matematisk modell. Hon måste även veta varför just denna matematiska modell är den mest lämpliga och hur den kan utvecklas och generaliseras i ett långsiktigt lärande. Läraren måste också behärska en variation av lösningar, dels för att kunna ta olika elevers perspektiv, dels för att kunna individualisera undervisningen och anpassa den till respektive elevs förmågor (Chick, Pham et al., 2006).

För att en lärarstudent ska kunna tillgodogöra sig detta krävs en kontextuell (förståelseinriktad) kunskap motsvarande kursplanens innehåll, inte bara en procedurell kunskap. Denna kunskap bör omfatta all den matematik som undervisas i grundskolan, från förskoleklass till årskurs 9. Detta är en förutsättning för att studenten ska kunna förstå vikten av kontinuitet i undervisningen och på vilket sätt eleverna bör behärska ett visst ämnesinnehåll.

Ytinlärning och djupinlärning

En förutsättning för att en lärarstudent ska kunna tillgodogöra sig nämnda didaktiska kunskaper är att hon själv behärskar den elementära matematik som undervisas i grundskolan och den terminologi med vars hjälp man kan resonera om detta innehåll (Schulman, 1986). Men det gäller också att förstå strukturen i ett aktuellt innehåll och att avgöra vad som är väsentligt eller mindre väsentligt (Chick, Pham et al., 2006).

För att beskriva vad som menas med en romb gäller det att uttömmande beskriva dess egenskaper, inte att räkna upp ett antal detaljer utan sammanhang. Det räcker i själva verket att tala om att romben har fyra lika långa sidor (Även kvadraten är en romb.) Många studenter skriver istället att motstående sidor är lika långa. Det är sant, men gäller även andra figurer. Andra skriver att motstående vinklar är lika stora, vilket också är sant, men detta gäller för alla parallellogrammer. Ytterligare andra skriver att den har två vinkelräta diagonaler, vilket återigen är sant men gäller även för andra figurer. En student som inte lär sig behärska enkla grundläggande begrepp kan senare få svårigheter med att förklara dem, eller att resonera om dem, med sina elever.

När studenter beskriver hur de adderar två tal i bråkform, blandar de ofta samman de termer de använder, vilket medför att deras förklaringar blir obegripliga. Dessutom har de, sannolikt från sin tid i grundskolan, lärt sig att det lönar sig att skriva mycket. Konsekvensen av detta är att de ofta trasslar in sig i språkliga motsägelser och missar poängerna i det som ska beskrivas. För dessa studenter gäller det att ta ett lärarperspektiv på skolans matematik och tänka över det språk de använder. Som lärare blir de ju mönsterbildare för elevernas språk.

Den här typen av problem är i många fall en konsekvens av den undervisning studenterna själva fått i skolan och hur de lyckats tillgodogöra sig den. Ofta har skolans matematikundervisning handlat om ett ytinriktat lärande (Marton & Booth, 2000).

> Det som utmärker ett sådant lärande är ett fokus på beteckningen (i det här fallet själva texten), medan en djupinriktning fokuserar på det betecknade (i det här fallet textens innebörd). (s. 40)

En av våra uppgifter som lärarutbildare är att göra studenterna medvetna om sina missuppfattningar, vilket är en förutsättning för att de ska kunna bearbeta och övervinna problemen.

Ur matematikämnets synvinkel innebär ytinlärning att eleverna lär sig en formel eller metod som de inte förstår innebörden av. Det innebär att de i ett tillrättalagt och i förväg känt sammanhang kan lösa ett antal förutsägbara uppgifter utan att de egentligen förstår vad de gör. Vid en djupinlärning förstår eleverna innebörden i formeln eller metoden och kan avgöra när formeln är giltig och hur man kan använda sig av formeln i nya och tidigare obekanta situationer. Det är den typen av grundläggande kunskap som måste betraktas som ett minimum för en blivande lärare, som ju i sin tur måste kunna avgöra om eleverna använder formeln eller metoden på ett adekvat sätt.

En forskare som intresserat sig för kunskap och lärande inom ämnena matematik och naturvetenskap är Lybeck (1981). Han menar, att när en elev löser en uppgift så sker detta oftast ur första ordningens perspektiv, vilket innebär att eleven (och läraren) är nöjd om svaret är rätt. Vad Lybeck efterlyser, speciellt när det gäller lärare, är ett andra ordningens perspektiv, alltså att de förmår reflektera över vad de gör. Det räcker ju inte med att en lärare själv kan lösa en uppgift (även om detta är en nödvändig förutsättning). Hon måste också kunna avgöra om en elev som har använt en annan metod har löst uppgiften korrekt. Detta kräver en helt annan inställning till ämnet matematik än vad vi ofta möter i dagens skola. För att förstå en elev och bedöma hennes kunnande, måste läraren kunna ta elevens perspektiv och själv behärska en variation av metoder. Det handlar alltså om metakognition, alltså en medvetenhet om, och förståelse av, den egna kunskapen och det egna tänkandet.

För att reda ut och konkretisera den här problematiken har jag inom projekten SKUM och MIL gett en stor grupp studenter ett test (en diagnos) vid starten av den första delkursen i matematikämnets didaktik. Diagnosen omfattande ett antal grundläggande uppgifter om taluppfattning och algebra. Uppgifterna i diagnosen är av en sådan karaktär att en normalpresterande elev i årskurs 6 bör behärska dem, om man utgår från kursplanens krav. Jag har även studerat och analyserat studenternas inlämningsuppgifter och salstentamina vid slutet av kursen. Syftet med detta är att kartlägga vilka kunskaper i och uppfattningar om matematik som finns bland studenterna och hur de förkunskaper, uppfattningar och attityder de har vid kursstarten påverkar deras studier i matematik på lärarutbildningen.

Frågeställningar för projekten SKUM och MIL.

- Vilka kunskaper i, uppfattningar om och inställningar till matematik har studenter vid starten av den första kursen i matematikämnets didaktik (Skolans matematik), när det gäller grundläggande aritmetik (taluppfattning) och algebra?
- Hur utvecklas dessa kunskaper, uppfattningar och inställningar under deras studier?

Metod

En vanlig metod för att kartlägga individers uppfattningar om ett fenomen är den kliniska intervjun. De metoder som används för detta har utvecklats genom åren, från Piagets (1951) studier i mitten av 1900-talet till Martons (1981) fenomenografi. När det gäller grundläggande aritmetik gjordes på 1980-talet banbrytande studier om yngre elevers strategier vid problemlösning av Carpenter, Moser & Romberg (1982). Steffe & Cobb (1988) och Vergnauld (1982).

Jag har valt en metod som beskrivs av Kilborn (2011a, b). Metoden utförs i två steg. Det första steget är kvantitativt med avsikten att kartlägga förekomsten och omfattningen av, i det här fallet, studenters svårigheter inom ett aktuellt område. Av det skälet fick studenterna en diagnos där de skulle lösa ett antal strategiskt valda uppgifter. Efter en analys av resultaten kunde jag avgöra inom vilka områden studenterna lyckades bra respektive mindre bra. Diagnosen gav även en hel del kvalitativ information som underlag för att ställa mer precisa frågor vid en skriftlig eller muntlig intervju. Det andra steget i metoden är en kvalitativ uppföljning av diagnosen. Den kan t.ex. bestå av klassrumsobservationer eller intervjuer. Jag har valt att analysera studenternas inlämningsuppgifter och redogörelser på salstentamina.

I den här rapporten presenteras resultatet av diagnosen. Som framgår av resultatet kan man redan från diagnosen, alltså från den kvantitativa delen av undersökningen, få en hel del intressanta kvalitativa resultat.

Analys av diagnosresultaten

Eftersom kursplanen i matematik är relevant för min studie, inleder jag det här avsnittet med några citat från Centralt innehåll i kursplanen för årskurs 4-6 (Skolverket 2011):

> Taluppfattning och tals användning
> Positionssystemet för tal i decimalform…
> Tal i bråk- och decimalform och deras användning i vardagliga situationer.
> Tal i procentform och deras samband med tal i bråk- och decimalform.
> Centrala metoder för beräkningar med… enkla tal i decimalformvid överslagsräkning, huvudräkning och …
>
> Algebra
> Obekanta tal och deras egenskaper samt situationer där det finns behov av att beteckna ett obekant tal med en symbol.
> Enkla algebraiska uttryck och ekvationer i situationer som är relevanta för eleven. (s. 64)

Detta innehåll ska kopplas till kursplanens syfte och de förmågor som beskrivs i inledningen. Den intressanta frågan är nu om alla lärarstudenter har sådana kunskaper och förmågor som är önskvärda enligt kursplanen till Lgr 11. Ett svar på frågan ges i resultaten av den diagnos som gavs till studenterna vid starten av deras första kurs i matematik, Skolans matematik.

Diagnosen genomfördes av 54 lärarstudenter med inriktning mot mellanstadiet och omfattar uppgifter som en normalt presterande elev i årskurs 6 borde behärska enligt kursplanens krav. Här följer uppgifterna i tur och ordning med lösningsfrekvenser och förklaringar.

Uppgift 1 a. Beräkna 0,4 · 0,1. Beskriv hur du har tänkt.

Svar	0,04	0,4	0,004	0,44	0,5	0,250	Ej löst	Summa
Frekvens	33	13	2	2	1	1	2	54
Anv. algoritm	15	3						18

Rätt svar är 0,04.

Uppgiften handlar om grundläggande taluppfattning och arbete med tal i decimalform. Att bara 61% av studenterna löste uppgiften är därför anmärkningsvärt. Till detta kommer att nästan hälften av de studenter som löst uppgifter inte kunde beskriva hur de har tänkt. De verkar bara ha en procedurell (mekanisk) kunskap inom området. Närmare hälften av de studenter som fick ett korrekt svar kunde inte se lösningen direkt, utan använde sig av en algoritm (skriftlig räkning). Ett skäl till detta verkar vara att man i svensk skola har tonat ner arbetet med tal i bråkform, samtidigt som förklaringen av vad som händer vid operationer i decimalform blir mest tydligt om man använder sig av bråkform. I det här fallet handlar uppgiften om multiplikationen $\frac{4}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{4}{100}$.

24% av studenterna fick svaret 0,4,vilket visar att de har ett mindre bra förhållningssätt till matematik. Om de reflekterat ett ögonblick, skulle de ha upptäckt att 0,4 · 1 = 0,4 och att 0,4 · 0,1 därför måste vara mindre, i själva verket 1/10 av 0,4. Lägg också märke till att många av studenterna fick helt orimliga svar eller inte ens försökte lösa uppgiften

Ett tiotal av studenterna har kommenterat sin lösning med ord som: ”Jag kommer inte ihåg hur man räknar med decimaler”. De bygger således sin uppfattning på en manipulation, på en regel som de inte längre kom ihåg, inte på en förståelse av operationen. Dessa studenter skulle behöva repetera stora delar av grundskolans matematikinnehåll för att med behållning kunna ta del av högskolans kurser i matematikdidaktik.

Uppgift 1b. Beräkna 0,4 / 0,1. Beskriv hur du har tänkt.

Svar	4	0,4	0,5	0,25	0,025	0,44	Ej löst	Summa
Frekvens	28	17	1	1	1	1	5	54
Anv. algoritm	1							1

Rätt svar är 4.

Uppgiften handlar om grundläggande taluppfattning och arbete med tal i decimalform. Bara 52% av studenterna löste uppgiften korekt. Att var tredje student gjorde samma systematiska fel (och fick svaret 0,4) är också anmärkningsvärt och tyder på stora brister i den undervisning de fått i skolan. Några av eleverna har löst uppgiften genom att gå över till procent! Andra studenter blandade ihop multiplikation och division och inverterar nämnaren. Ytterligare andra studenter skrev att de glömt trappan, alltså hur man ställer upp en skriftlig division. Detta är ytterligare exempel på en ytinriktad och procedurell kunskap.

Studenternas dilemma verkar vara att de i skolan bara lärt sig att dividera med ett naturligt tal. De blir därför ställda när det i nämnaren förkommer ett tal i decimalform. Detta kan man lösa på en rad olika sätt, vilket de borde känna till.

- Man kan skriva divisionen som ett bråk och förlänga med 10, vilket ger 4 / 1 = 4.
- Man kan räkna i enheten tiondelar. Detta kan konkretiseras som att uppgiften handlar om 0,4 liter och 0,1 liter som kan förvandlas till 4 dl och 1 dl. Man får då återigen 4 / 1 = 4.
- Man kan också använda sig av innehållsdivision och ställa frågan hur många gånger 1 tiondel ryms i 4 tiondelar (alltså hur många dl det går på 4 dl.)

Ingen av studenterna verkar ha resonerat på det här sättet.

Uppgift 1c. Beräkna 50 · 0,7. Beskriv hur du har tänkt.

Svar	35	3,5	0,35	350	25	300	5,7	50,7	Ej löst	Summa
Frekvens	39	4	1	1	1	1	1	1	5	54
Anv. algoritm	8	1								9

Rätt svar är 35.

Även den här uppgiften handlar om grundläggande taluppfattning och arbete med tal i decimalform. 72% av studenterna har fått rätt svar. Flera av dem genom att använda sig av en algoritm.

Många av de felaktiga svaren visar på en mindre bra taluppfattning. Ett enkelt närmevärde till 50 · 0,7 är 50 · 1 = 50. Det betyder att 28% av studenterna, de som fått svar som 0,35, 300 och 350, knappast kan ha reflekterat över rimligheten i vad de gör, vilket är ett mindre bara förhållningssätt till matematik för den som tänker bli lärare.

Vad uppgiften handlar om är enkel grundläggande algebra, alltså hur studenterna uppfattat de grundläggande räknelagar som de borde ha mött redan på lågstadiet såsom att 5 · 2 = 2 · 5. I det här fallet gäller det den associativa räknelagen, alltså att 50 · 0,7 = 5 · 10 · 0,7 = 5 · 7. Ett alternativ är att helt enkelt multiplicera 5 och 7 och efter en överslagsräkning placera decimaltecknet rätt. Ingen av studenterna verkar ha använt sig av dessa enkla grundläggande metoder.

Man kan nu invända att studenterna inte har lärt sig detta i skolan. Ja, jag är medveten om det och det medför att vi på högskolan måste ta vårt ansvar för att förändra den här bilden. Det gör vi genom att erbjuda studenterna en adekvat didaktisk utbildning. Problemet är emellertid att de resurser vi har, inte räcker till för detta med tanke på att studenternas för-förståelse för matematik ser ut på det här sättet inom de flesta områden av skolmatematiken. Samtidigt måste vi ju se till att de studenter som kommer till utbildningen med adekvata kunskaper, får en utbildning enligt gällande kursplan.

Uppgift 1d. Beräkna $\frac{1}{4}$ av 0,16. Beskriv hur du har tänkt.

Svar	0,04	0,4	4	0,25	0,64	0,66	0,265	0,3	Ej löst	Summa
Frekvens	39	4	1	1	1	1	1	1	5	54
Anv. algoritm	8	1	3	2		1	1			16

Rätt svar är 0,04.

Uppgiften handlar i grunden om division av ett decimaltal, alltså 0,16 med det naturliga talet 4. Bara var tredje student har klarat den uppgiften. Ungefär lika många elever har inte ens försökt lösa uppgiften. Det faktum att det förekommer en mängd olika, felaktiga, svar tyder på att det här är ett område som få studenter behärskar. Nästan hälften av de studenter som har fått rätt svar har använt sig av en algoritm.

Uppgiften är intressant eftersom den handlar om grundläggande taluppfattning. Att ta en fjärdedel av ett tal innebär dela talet i fyra delar och att ta en sådan andel. Ett problem med uppgiften består i att tolka talet 0,16 som 16 hundradelar. För den som förstår denna innebörd är det bara att dividera 16 med 4 och vara medveten om att enheten är en hundradel. Enbart ett par av studenterna verkar ha insett detta. I stället för att resonera har många av studenterna skrivit om uppgiften som $0{,}25 \cdot 0{,}16$, vilket ofta lett till ett felaktigt svar eftersom de inte behärskat multiplikationsalgoritmen eller räkning med tal i decimalform.

Intervjuer som tidigare gjorts av elever på högstadiet visar att det här problemet ofta handlar om en språklig förvirring. På svenska läser man inte 0,16 som 16 hundradelar utan som 0 komma 16. Dividerar man detta med 4 kan det verka rimligt att svaret ska bli 0 komma 4 eftersom 16 / 4 = 4.

Uppgift 1e. Beräkna $\frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a}$. Beskriv hur du har tänkt.

Svar	1	a	$4a^2$	$a^2/4$	2a	4A	a4	Ej löst	Summa
Frekvens	12	6	3	6	3	1	1	22	54

Rätt svar är 1.

Uppgiften handlar om grundläggande algebra och taluppfattning. En student som har en acceptabel taluppfattning kan se svaret direkt. Bara 22% av studenterna kunde lösa den här uppgiften samtidigt som hela 41% av dem inte visste hur de ska göra: ”Har ingen aning”, ”Vet verkligen inte”, ”Kommer inte ihåg” … Detta tillsammans med de typer av felräkningar som har gjorts bekräftar att många studenter har uppenbara svårigheter med grundläggande algebra.

Vad uppgiften handlar om är begreppet (multiplikativ) invers. Som exempel har talet 7 en invers $\frac{1}{7}$ vilket innebär att $7 \cdot \frac{1}{7} = 1$. På motsvarande sätt är $\frac{2}{7}$ och $\frac{7}{2}$ varandras inverser och produkten är 1. Den som förstår denna grundläggande räkneregel ser direkt att $\frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a} = 1$.

För den som inte förstår detta finns det en rad alternativ:

- Variabeln *a* står för ett tal. Med lite fantasi är det därför bara att pröva vad som händer för några värden på *a*. För $a = 1$ får vi $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} = 1$, för $a = 2$ får vi $\frac{2}{2} \cdot \frac{2}{2} = 1$, för $a = 4$ får vi $\frac{4}{2} \cdot \frac{2}{4} = 1$. Osv. Det är anmärkningsvärt att ingen av studenterna har använt sig av denna enkla metod.
- I skolan lär man sig att $\frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a} = \frac{2a}{2a}$, vilket kan förkortas till 1.

Man kan återigen sammanfatta detta som att de flesta av studenterna enbart verkar ha procedurella (mekaniska) kunskaper i matematik. Deras förmåga har i det här fallet en så begränsad täckningsgrad och aktionsradie att många av dem varken vågar pröva sig fram, gissa eller använda sin fantasi.

Uppgift 1f. Beräkna $\frac{a}{2}/\frac{a}{2}$. Beskriv hur du har tänkt.

Svar	1	a	0,5a	$a^2/4$	0,5	0	$a^2/4$	$4a^4+4$	Ej löst	Summa
Frekvens	15	6	1	2	1	1	1	1	25	54

Rätt svar är 1.

Uppgiften handlar återigen om grundläggande algebra och taluppfattning. En elev som har en acceptabel taluppfattning ser direkt svaret. Bara 27% av studenterna kunde lösa uppgiften och 46% av dem visste inte hur de skulle göra. Liksom på uppgift 1e ger många av de studenter som inte lyckats lösa uppgiften förklaringar som: ”Har ingen aning”, ”Vet verkligen inte”, ”Kommer inte ihåg” … De olika typer av felräkningar som har gjorts, bekräftar återigen att studenter har uppenbara svårigheter med grundläggande algebra.

Vad uppgiften handlar om är division av ett tal med sig självt, vilket alltid ger svaret 1 (såvida talet inte är 0). Som exempel är 7 / 7 = 1 och $\frac{1}{7}$ / $\frac{1}{7}$ = 1. På motsvarande sätt är talet $\frac{a}{2}$ dividerat med sig självt lika med 1.

För den som inte inser detta, finns det fler enkla lösningar. Variabeln a står ju för ett tal. Med lite fantasi är det därför bara att pröva. $a = 1$ ger $\frac{1}{2}/\frac{1}{2}$ = 1. $a = 2$ ger $\frac{2}{2}/\frac{2}{2}$ = 1, $a = 4$ ger $\frac{4}{2}/\frac{4}{2}$ = 1, osv. Det är återigen anmärkningsvärt att ingen har använt sig av denna enkla metod.

Uppgift 2a. Utför subtraktionen 413 – 398.

Svar	15	185	150	150	14	11	13	18	25	Ej löst	Summa
Frekvens	44	2	1	1	2	1	1	1	1	1	54

Rätt svar är 15.

Med tanke på att det i svensk skola förekommer en rad mindre bra subtraktionsmetoder, är det intressant att studera hur studenterna behärskar räknesättet subtraktion. De flesta av studenterna lyckades bra och 81% fick rätt svar. Flera av studenterna räknade uppgiften i huvudet. Samtidigt är det allvarligt att så många blivande lärare fick orimliga svar.

Uppgiften är så konstruerad att man lätt kan finna ett närmevärde såsom 413 – 400 = 13, vilket lätt kan korrigeras till 15. En elev i årskurs 5 skulle sannolikt ha tänkt att svaret är 13 mer och 2 mindre än 400, alltså 13 + 2 = 15. En student med lite känsla för tal borde således direkt ha sett att tal som 185, 150 och 105 inte är rimliga svar. De borde också direkt ha reagerat på svar som 14 och 18 med tanke på att en av termerna är udda och en är jämn, vilket leder till att svaret måste vara ett udda tal. För en lärare är den här typen av taluppfattning en nödvändig kunskap.

En positiv iakttagelse är att ingen av studenterna använde s.k. mellanledsräkning, en metod som är mycket vanlig i dagens skola och som ofta leder till systematiska felräkningar.

Uppgift 2b. Utför divisionen 864 / 8 i en lämplig algoritm.

Svar	108	18	122	180	54	28	8	18,625	Ej löst	Summa
Frekvens	25	14	1	1	1	1	1	1	9	54

Rätt svar är 108.

I svensk skola används oftast en algoritm för division som inte säkerställer positionerna i kvoten. Det krävs därför en bra taluppfattning för att förhindra felaktiga svar. Det visar sig i det här fallet att inte ens varannan student räknade rätt på uppgiften 864 / 8. Till detta kommer att hela 26% av studenterna fick det orimliga svaret 18. De flesta av de studenter som inte löste uppgiften uttryckte att de inte kunde någon algoritm! Dessutom var det så, att många av de studenter som räknade rätt med en algoritm använde sig av hemmagjorda metoder.

Uppgiften är konstruerad så att den som saknar grundläggande taluppfattning riskerar att räkna fel vid användning av den vanligaste svenska algoritmen, den man kallar för kort division. En enkel överslagsräkning ger att 800 / 8 = 100 vilket visar att svaret 18 är orimligt. Eftersom alla studenter borde känna till den distributiva räknelagen, den räknelag som knyter samman addition och multiplikation, borde de direkt inse att 864 = 800 + 64 och att svaret är 100 + 8.

Uppgift 2c. Förklara tiotalsövergången vid beräkningen 8 + 7.

Svar	Förstått	Missuppfattat	Inte försökt	Summa
Frekvens	28	5	21	54

Tiotalsövergången är en fundamentalt viktig operation som elever brukar möta i årskurs 2 eller 3. Operationen är inte minst viktig för att förstå talsystemets uppbyggnad. Med en mycket generös tolkning av svaren finner jag att drygt varannan student förstår vad tiotalsövergång innebär. Många av studenterna skriver ”Övergång?”. ”Vet inte vad ordet innebär” el. dyl.

Vad det här handlar om är, att när summan av de ental som ska adderas överstiger 9, måste man gruppera summan i ental och tiotal. Det gör man i det här fallet genom att ”ta 2 från 7 och ge till 8” Man får då resultatet 8 + 2 + 5 = 10 + 5 = 15. Operationen förklaras algebraiskt med hjälp av den associativa lagen för addition, en grundläggande räknelag som genomsyrar all elementär matematik.

Uppgift 2d. Hur kan man beräkna 16 · 25 i huvudet? Vilken/vilka räknelagar har du använt?

Svar	Anv. associativa lagen, rätt svar	Anv. distributiva lagen, rätt svar.	Fel svar	Har inte försökt	Summa
Frekvens	13	18	9	14	54

Ett exempel på korrekt svar är 4 · 4 · 25 = 4 ·100 = 400 och associativa lagen för multiplikation..

För den som behärskar räknelagarna är den associativa lagen den enklaste lösningen. 16 · 25 tolkas då som (4 · 4) · 25 = 4 · (4 · 25) = 100. Den metoden får anses tillhöra de mest grundläggande metoderna vid huvudräkning. Bara 23% av studenterna har använt metoden.

En annan metod är den distributiva lagen som utgör grunden för räkning i algoritm. Man delar då upp 16 i 10 + 6 och räknar 25·(10 + 6) = 250 + 150 eller delar upp 25 i 20 + 5 och räknar 16·(20 + 5) = 320 + 80. Var tredje student har använt en sådan, betydligt krångligare metod. 43% av studenterna har emellertid räknat fel eller inte känt till någon metod. Felräkningarna har varit av typen 1500, 460 och 230. Flera studenter har inte läst frågan utan använt en algoritm.

På frågan vilken räknelag man har använt har ytterst få försökt ge ett svar. Ingen av studenterna visste vilken räknelag de har använt.

Uppgift 2e. Hur kan man i huvudet beräkna 92 + 56 + 8? Vilken/vilka räknelagar har du använt?

Svar	Anv. kommutativa lagen, rätt svar	Anv. hemmagjord metod, rätt svar	Fel svar	Har inte försökt	Summa
Frekvens	32	13	2	7	54

Ett exempel på korrekt svar svar är 92 + 56 + 8 = 92 + 8 + 56 = 100 + 56 = 156 och kommutativa lagen för addition.

För den som behärskar den kommutativa lagen är en enkel lösning 92 + 8 + 56 = 100 + 56. Nästan 60% av studenterna använde den metoden, men ingen visste vilken räknelag de hade använt. 23% av studenterna använde en hemmagjord metod som påminner om algoritmräkning (mellanledsräkning). Den vanligaste metoden var 90 + 50 = 140 plus 2 + 6 + 8 = 16 och den näst vanligaste metoden 90 + 60 = 150 plus 2 + 4 = 6. Var sjätte elev räknade fel eller löste inte uppgiften.

Uppgift 3 Vilka av följande utsagor är sanna?

a. Summan av två udda tal är ett udda tal

sant □ falskt □

b. Produkten av två udda tal är ett udda tal

sant □ falskt □

c. Summan av ett udda tal och ett jämnt tal är ett udda tal

sant □ falskt □

d. Produkten av ett udda tal och ett jämnt tal är ett udda tal

sant □ falskt □

Svar	a. sant	a. falskt	b. sant	b. falskt	c. sant	c. falskt	d. sant	d. falskt
Frekvens	3	48	31	16	37	12	23	22

Rätt svar är: a falskt, b sant, c sant och d falskt.

Som framgår av tabellen, har vissa av studenter inte kryssat i alla rutor. Kommentarer till detta visade att man inte vet vad som menas med summa och produkt. Det framgår också att osäkerheten är stor, framför allt när det gäller multiplikation. Bara 41% av studenterna visste att produkten av ett udda och ett jämnt tal är ett jämnt tal, t.ex. att $7 \cdot 8$ är ett jämnt tal . Även på uppgifterna b och c är frekvensen av rätt svar anmärkningsvärt låg, 57% respektive 69%. Det här handlar om mycket grundläggande taluppfattning.

Individuella resultat på diagnosen

En intressant fråga är hur den enskilde studenten har lyckats på diagnosen. Diagnosen omfattar 15 uppgifter och så här har de lyckats individuellt:

Antal rätt	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Frekvens	2	0	0	1	2	3	5	10	8	7	5	4	4	3	0	0

Som framgår av tabellen har:

- 2 studenter har inte svarat rätt på någon enda uppgift.
- 41% av studenterna har räknat rätt på mindre är hälften av uppgifterna.
- 20% av studenterna har räknat rätt på mer är 10 av 15 uppgifter
- Ingen av dem har fått rätt svar på alla uppgifterna.

Sammanfattning

Av den här delen av studien kan man dra följande slutsatser:

- Studenterna har ett mindre bra förhållningssätt till matematik och uppvisar bristande kunskaper och förmågor när det gäller grundläggande aritmetik och algebra. De har i allmänhet ytliga, procedurella kunskaper och uppfattar matematik som att räkna och att använda sig av formler och metoder. Detta leder till vissa konsekvenser. För en student som inte ens kan analysera och lösa de uppgifterna, som de senare ska undervisa om som lärare, är det inte möjligt att inom didaktiken diskutera centrala didaktiska aspekter, alternativa lösningsmetoder, hur man kan variera undervisningen eller hur man kan individualisera eller konkretisera undervisningen.
- För att tillgodogöra sig en högskoleutbildning inom matematikämnets didaktik krävs kontextuella kunskaper, alltså en förståelse för mate-

> matikdidaktiska sammanhang och de grundläggande strukturer skolans matematik bygger på. Det faktum, att många av studenterna enbart har procedurella matematikkunskaper, kan leda till svårigheter att läsa och analysera kurslitteraturen, till en begränsad förmåga att resonera om och ta ställning till didaktiska frågor eller att förstå den didaktiska forskningens betydelse för skolans praktiska arbete.

Dessa tillkortakommanden hos studenterna leder till en viss turbulens i undervisningen. Eftersom de flesta av de studerande har problem såväl med enkel räkning som med den terminologi som används i skolan, blir undervisningen ideligen störd av en typ av frågor från studenterna som de borde ha fått svar på redan när de gick på mellanstadiet. Många av dem har dessutom en sådan rädsla för matematik att de inte ens vågar tänka annorlunda eller korrigera sina uppenbara missuppfattningar. Mot denna bakgrund är det för många av dagens studenter inte möjligt att nå upp till de krav som ställs i högskolans kursplaner.

Av de senaste årens debatt om elevers kunskaper och om bristen på kompetenta lärare i matematik, kan man dra slutsatsen att svensk matematikundervisning befinner sig i en kris. Jag konstaterar också att man från två av landets högskolor i dagarna uppmärksammat att detta även gäller lärarutbildningen. Jag vill också hänvisa till artikel ”Lärarutbildning – bygge i förfall” (Lärarnas tidning, 2012-11-15), där man slår fast att ”Lärarstudenter kommer allt sämre rustade till högskolan. Trots det har antalet lektioner på utbildningen minskat radikalt”. Samtidigt verkar de flesta forskare inom matematikämnets didaktik vara överens om att lärarens kunnighet i ämnet och i ämnets didaktik är avgörande faktorer för att deras elever ska lyckas i ämnet. Dessa fakta utgör en viktig bakgrund när det gäller att värdera utbildningen av lärare som ska undervisa i matematik.

De lärarstuderande vi möter i dag och som ska se till att svensk matematikundervisning når tillfredsställande resultat i framtiden, saknar i många fall adekvata kunskaper i matematik. Som lärarutbildare är det vår uppgift att korrigera för detta och se till att blivande lärare kan leda undervisningen på ett framgångsrikt sätt. Problemet är emellertid att alltför många av de studenter som kommer till lärarutbildningen inte har lärt sig matematik i skolan utan bara lärt sig att räkna och hjälpligt hantera vissa standarduppgifter med hjälp av regler som de ofta inte har förstått.

Forskningsbaserad utbildning i matematikämnets didaktik på lärarutbildningen

Den här studien leder till en ny frågeställning, nämligen hur vi kan omforma dagens lärarutbildning på ett sådant sätt att vi i undervisningen kan möta studenternas bristande kunskaper i och oreflekterade förhållningssätt till matematik. Samtidigt är det viktigt att vi inte försummar de studenter som redan har tillräckliga kunskaper i matematik och behöver utvecklas utgående från sina förutsättningar. Målet måste vara att vi på såväl kortare som längre sikt kan erbjuda alla studenter en adekvat och kvalitetssäkrad lärarutbildning. Det här innebär att:

- Det är dags att se över dagens utbildning och bygga upp en ny, forskningsbaserad utbildning i matematik och matematikämnets didaktik. Denna utbildning måste ta sin utgångspunkt i aktuell pedagogisk och didaktisk forskning, men också kunna möta de faktiska behov av kunskaper en lärare behöver i dagens skola. En modern lärarutbildning måste, på samma sätt som skolan, tillåta en individualisering som kan möta studenternas individuella behov. På en högskola bör man även kunna ta hänsyn till studenternas förkunskaper och behov av kompensatorisk undervisning när de saknar adekvata kunskaper vid antagningen. Man bör även arbeta med studenternas förhållningssätt till såväl yrket, ämnet som deras egna kunskaper.
- Lärarutbildningen bör kunna möta skolans krav på kunskaper som idag är inriktade mot elevernas förmågor. Studenterna bör därför i utbildningen ges möjligheter att utveckla viktiga egna förmågor såsom att kommunicera och skriva med ett adekvat språk, att analysera och resonera utgående från kurslitteraturen och att kunna omsätta detta i praktisk undervisning.
- Lärarutbildningen bör ta ansvar för att de studenter, som antagits till utbildningen, men som inte uppfyller rimliga krav på förkunskaper, och ofta har ett negativt förhållningssätt till matematik, kan erbjudas en för dem anpassad undervisning. Det kan t.ex. innebära att deras första kurs i matematikämnets didaktik inleds med en preparandkurs där de ges möjligheter att såväl reparera bristande matematikkunskaper som att bearbeta sitt förhållningssätt till eller rädsla för ämnet.

Ett annat stort problem som bör tas på allvar är studenternas uppfattning om akademiska studier. Många av studenterna verkar inte förstå att heltidsstudier innebär arbete 40 timmars arbete i veckan, inte bara att delta vid föreläsningar och seminarier. De verkat heller inte förstå vikten av att tillgodogöra sig kurslitteraturen. När vi diskuterat detta på mina kurser har studenterna framhållit att de på andra kurser aldrig har diskuterat kurslitteraturen och att de därför trodde att det inte var så viktigt att läsa den. Detta belyser vikten av att alla som undervisar på högskolan måste samma målsättning, samma kunskapssyn och samma krav på vad studenterna ska kunna prestera när de lämnar högskolan.

Referenser

Carpenter, T., Moser, J. & Romberg, T. (1982). *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. Hillsdale, N J: Lawrence Erlbaum.

Chick, H.L., Baker, M., Pham, T., & Cheng, H. (2006). *Aspects of teachers' pedagogical content knowledge for decimals*. In J. Novotna, H. Moraova, M. Kraka & N. Stehlikova (Eds.) *Proceedings of the 30th Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 297-304). Prague: PME.

Chick, H.L., Baker, M., Pham, T., & Cheng, H. (2006). *Probing teachers' pedagogical content knowledge: Lessons from the case of the substraction algorithm.* In P. Grootenboer, R. Zevenbergen & M. Chinnappan (Eds.) *Identities, cultures and learning spaces* (Proceedings of the 29th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, pp. 139-146). Canberra: MERGA.

DsU 1986:5. Matematiken i skolan. *En översyn av undervisningen i matematik inom skolväsendet.*

Kilborn, W. (2011a). On diagnostic tests and arithmetic skills. In J. Emanuelsson, L. Fainsilber, J. Häggström, A. Kullberg, B. Lindström & M.L Löwing (Eds.). *Voices of learning and instruction in mathematics*. Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning.

Kilborn, W. (2011b). On curricula and the teaching process. In J. Emanuelsson, L. Fainsilber, J. Häggström, A. Kullberg, B. Lindström & M. Löwing (Eds.). *Voices of learning and instruction in mathematics*. Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up*: *Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Linde, G. (2000). *Det ska ni veta! En introduktion till läroplansteori*. Lund: Studentlitteratur.

Lybeck, L. (1981). *Archimedes i klassen*. Göteborg: Göteborg studies in educational sciences 37.

Marton, F. (1981). Phenomenography – describing conceptions of the world around us. *Instructional Science, 10*, 177-200.

Marton, F. & Booth, S. (2002). *Om lärande*. Lund: Studentlitteratur.

Niss, M., & Højgaard Jensen, T. (2002). *Kompetencer og matematiklæring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Köpenhamn: Uddannelseministeriet.

PISA (2015). *Med fokus på matematik. Analys av samstämmighet mellan svenska styrdokument och den internationella studien PISA*. Stockholm, Skolverket.

Piaget, J. (1951). *The language and thought of the child.* London: Routledge & Kegan Paul.

Skolverket 2011. *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet* 2011. SKOLFS 2011:19.

SOU 2004:97. *Att lyfta matematiken,*

Steffe, L., & Cobb, P. (1988). *Construction of Arithmetical Meanings and Strategies*. New York: Springer-Verlag.

TIMSS 2011. *Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv*. Rapport 380. Stockholm: Skolverket.

Vergnauld, G. (1982). A Classification of Cognitive Tasks and Operations of Thougt Involved in Addition and Subtraction Problems. In T. Carpenter, J. Moser, & T. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.