Välkomna till matematikens kök

Kropp, sinnen och platser i matematiklärandet

Lars Mouwitz

Matematiken saknar i högre grad än många andra ämnen gestaltande kategorier som skulle kunna förmedla ämnet som en pågående mänsklig praktik. Ämnet framställs med så specifika symboler att det ser ut som en samling färdiga, tidlösa sanningar och metoder som är sig själva nog, och som liksom har uppstått av sig själva utan inblandning av människan.

Men ett historiskt perspektiv skulle avslöja att under ytan på alla matematiska aktiviteter över tid finns i själva verket ett stråk av ”tysta” underliggande känslor, föreställningar, metaforer och spänningsfält, något som sällan kommer till uttryck i text. Kanske kan man med Wittgenstein säga *Vovon man nicht sprechen kann, darüber muss man schweigen*.[1] Det matematiska symbolspråket i formler och uttryck är mycket effektivt, men helt inriktat på inommatematiska begrepp. Tystnaden är med andra ord inte absolut, det är språket som producerar den. Ett liknande problem har kanske en kompositör som enbart arbetar med notskrift, men kanske inte en skådespelare eller författare? Till exempel kan en författare med ett utsökt språk skriva om hur det är att vara just författare.

Vissa estetiska kvaliteter hos matematiken är ganska väl uppmärksammade, i första hand sådana som i nietzscheansk

[1] I Anders Wedbergs svenska översättning: ”Varom man inte kan tala, därom måste man tiga.” Ludwig Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus* (Stockholm: Thales, 1992), s. 37.

mening skulle kunna kallas ”apolloniska”.[2] Hit hör till exempel resultat inom områden som behandlar symmetri, mönster, struktur, ordning, abstraktion och stringent argumentation. Åtskilliga böcker har skrivits på dessa teman och årliga internationella konferenser anordnas, till exempel organisationen Bridges som haft konferenser om konst och matematik sedan 1998.[3] Däremot finns nästan inget om ”dionysiska” nietzscheanska teman, så som de till exempel uppmärksammas i följande citat från Jan Thavenius:

> Till skillnad från många andra former av vetande, till exempel vetenskapens, kan konsten släppa fram det osäkra, ofärdiga, motsägelsefulla och mångtydiga i våra kunskaper. Konsten har plats för känslor, inlevelse och engagemang, för det personliga och subjektiva, för konflikter och dilemman. Konsten berättar gärna konkret och sinnligt och visar istället för att argumentera, frågar hellre än ger bestämda svar.[4]

Den matematiska restaurangen

Det sägs ibland att matematiker har ovanligt stora papperskorgar. Alla spår av den egentliga praktiken har avsiktligt sopats bort. Det enda som kvarstår är det logiskt perfekta, välstrukturerade, bevisade, tidlösa och begreppsligt exakta. Platons ande firar här stora triumfer, även om inte alla matematiker är uttalade platoniker. Matematikern Reuben Hersh jämför i sin bok *What is Mathematics, Really?* matematisk praktik med verksamheten på en restaurang där man som gäst i matsalen enbart får stifta bekantskap med de färdiga ”rätterna”, prydligt och perfekt upplagda och inburna på sina tallrikar.[5] Vad som händer i det stökiga, bullriga, felbara, intuitiva och kreativa köket får man aldrig

---

[2] Friedrich Nietzsche, *Tragedins födelse*, övers. Martin Tegen, i *Samlade skrifter*, bd 1 (Eslöv: Symposion, 2000).

[3] www.bridgesmathart.org.

[4] Jan Thavenius, ”Om den radikala estetiken”, *Utbildning & Demokrati,* vol. 14, 2005.

[5] Reuben Hersh, *What Is Mathematics, Really?* (London: Vintage, 1998).

veta. Och vilka är det som serverar de färdiga rätterna i matsalen? Jo, lärarkåren förstås. De vet vanligen lika lite om vad som pågår i köket som gästerna vid borden. Och eleverna som ska lära sig utöva den matematiska kokkonsten? De släpps tyvärr inte in i köket, de vet inte ens om att det finns. Detta är naturligtvis fatalt, eftersom undervisningen är till för att utveckla just en matematisk praktik, inte till för att beundra de eleganta slutprodukterna. I många fall kan inte ens de forskande matematikerna själva formulera vad som pågår. Så här skriver Reuben Hersh:

> Jag började samtala med andra matematiker om bevis, kunskap och verklighet inom matematiken och jag fann att min egen konfunderade osäkerhet var typisk. Men jag fann också en anmärkningsvärd törst vad gäller behovet av konversation och diskussion om våra privata upplevelser och inre föreställningar.[6]

Även de filosofer som under olika tidsepoker intresserat sig för matematikens grunder har befunnit sig i matsalen och stirrat blint på tallrikarna. Ett exempel är att under första hälften av 1900-talet behärskades filosofin av de så kallade logiska empiristerna, speciellt i de anglosaxiska och nordiska länderna. Mycket kortfattat kan man säga att denna filosofiska inriktning hade som viktigaste mål att utforma ett logiskt perfekt *observationsspråk*, där fakta på ett neutralt sätt kunde beskrivas och nya sanningar deduceras ur gamla med hjälp av logik. På så sätt kunde filosofin utvecklas till en värdefull stödvetenskap till redan etablerad vetenskap, i första hand naturvetenskap. Eftersom matematiken redan var naturvetenskapens främsta språk blev det en viktig uppgift för filosofer att förvandla just matematiken till ett logiskt perfekt system med en exakt definierad terminologi. Flaggskeppet i denna satsning blev Bertrand Russells och Alfred North Whiteheads *Principia Mathematica*.[7] Innan dess var ma-

---

[6] Philip Davis & Reuben Hersh, *The Mathematical Experience* (Boston: Birkhäuser, 1981), s. 4.

[7] Bertrand Russell & Alfred North Whitehead, *Principia Mathematica* I-III (Cambridge 1910-1913).

tematiken tämligen vildvuxen och olika synsätt och notationer förekom parallellt. I och med logisticeringen av ämnet framstod det som tidlöst, och processer som praktik och skapande definierades bort. Ett uttryck med likhetstecken kunde till exempel nu likaväl läsas från höger till vänster som tvärtom. Matematiken förelåg till synes färdig, den uppfanns inte.

Matematik – ett ämne för bildning?

I skolans värld kopplades matematiken främst till naturvetenskap och teknik vid denna tid, och Euklides tvåtusenåriga geometri plockades bort och ersattes av den så kallade *analysen* eller *differentialkalkylen*, en gren av matematiken som utvecklats som ett direkt verktyg för att hantera rörelse och förändring inom fysik, teknologi och sedermera även ekonomi. Matematik framställdes som det moderna alternativet till latinet, som tidigare ansetts vara grundläggande för såväl logiskt tänkande som personlighetsutveckling. Det klassiska bildningsidealet som var nära knutet till studier i latin, grekiska och läsning av klassiska verk på dessa språk utrangerades och själva uttrycket ”bildning” fick en negativ klang av lite löjeväckande förfining och världsfrånvändhet. Den nya generation som skulle bygga framtiden uppmuntrades i stället till att söka till gymnasieskolans *reallinje*, där handfasta ämnen som matematik, fysik och kemi var huvudämnen. Inte minst i Sverige framställdes naturvetare och tekniker som samhällets hjältar och visionärer. Ett typexempel är de ledande ingenjörer som byggde upp den svenska kärnkraftsindustrin. De hade ofta ett djupt socialt engagemang och målade upp bilden av ett framtida lyckorike med i stort sett obegränsad tillgång på energi.[8] Den tillbakablickande boklärde akademikern i sin kammare trängdes undan av den framtidsbyggande ingenjören som lyfte samhället ur fattigdom och elände med räknestickan i västfickan som främsta tillgång.

[8] Johan Berglund, *Formalisering och yrkeskunnande* (Stockholm: Kungliga Tekniska Högskolan, 2011).

Idag är läget annorlunda. Trots att matematikämnet fortfarande anses ”viktigt” bland skolpolitiker lockar det inte längre ungdomar på samma sätt som under 1950- och 60-talen. Tvärtom representerar ämnet för de flesta ett meningslöst inskränkt hopkok av regler och symboler som måste pluggas in för att man ska få ”körkort” till andra utbildningar. Inga kopplingar finns till det som dagens ungdomar anser spännande, intressant och betydelsefullt. Kanske är det dags att formulera ett nytt bildningsbegrepp, där musik, bild, politik, sociala relationer, kommunikation, moral, helhetssyn, natur och livsstil är centrala? Finns det då plats för någon slags ”matematik” inom ett sådant kommunikativt samhälleligt bildningsbegrepp?[9] Vi får ta en rejäl omväg över estetiska lärprocesser för att närma oss frågan.

Estetiska lärprocesser – varför då?

I närmare trettio år har det funnits en viss uttalad strävan från statens sida att införa mer ”kultur” i det svenska utbildningssystemet. Särskilda medel tilldelades sålunda skolorna under åren 1985–1991 och en mängd kulturprojekt genomfördes på olika nivåer. Bland annat anställdes speciella ”kulturpedagoger” för att arbeta med elever och lärare under perioden. Arbetet fortsatte sedan på utredningsnivå och Utbildningsdepartementet formulerade vid slutet av nittiotalet ”en strategi för kultur i skolan”, som ledde till projektet ”Kultur för lust och lärande” under ledning av Statens kulturråd och Skolverket. Vissa högskolor, till exempel Malmö högskola, fick särskilda uppdrag att undersöka och utveckla fältet ”kultur i skolan” och i samband med detta präglades bland annat uttrycket *estetiska lärprocesser*.

Under 2000-talets första decennier har denna statliga strävan blivit alltmer institutionaliserad och allt fler lärosäten erbjuder idag kurser i estetiska lärprocesser, vanligen som en del av lärarutbildningens kursprogram. Redan från start var det dock oklart

---

[9] En liten skiss gjorde jag i HSV:s bildningssatsning: Lars Mouwitz, *Bildning och matematik*, HSV:s rapportserie 2004: 29R (Stockholm: Högskoleverket, 2004).

vad uttrycket ”estetiska lärprocesser” egentligen skulle betyda. Lite elakt skulle man kunna hävda att det handlade om en byråkratisk konstruktion. Uttryck som ”konst” och ”kultur” förblev också vaga trots att de användes flitigt som honnörsord. Meningsskapandet överlämnades i stället till praktikerna på fältet. Detta var i och för sig en lyckad strategi, men antagligen oavsiktlig från myndigheternas sida. De senaste åren har även andra discipliner och verksamheter än den pedagogiska fått upp intresset för den estetiska dimensionen i lärandet. Hit hör kognitionsvetenskap, hjärnforskning, IKT-forskning, näringslivets kreativitetssatsningar och en alltmer desperat skolpolitik som försöker fånga upp ungdomars intresse för bild, dans och musik. Ytterst bottnar denna desperation i det faktum att Sverige (och EU) verkar få allt svårare att hävda sig i den globala tekniskt-ekonomiska kapplöpningen.

I många fall är även den *konstnärliga forskning* som bedrivs på konstnärliga fakulteter direkt eller indirekt knuten till utbildningsvetenskapliga frågeställningar kring hur olika ämnen ska kunna levandegöras. Meningsskapande pågår således fortlöpande på en mängd olika håll, och kommer förhoppningsvis så att göra. Samtidigt innebär denna begreppsliga öppenhet och mångfald en kamp om att etablera ett framtida tolkningsföreträde. Denna artikel bör ses som ett litet bidrag till denna turbulenta diskussion.

Lärandets materiella rumslighet

Själv har jag under stora delar av mitt yrkesliv och i min forskning ägnat mig åt matematik och matematikutbildningsfrågor, vanligen från filosofiska och estetiska perspektiv, men också som utredare för Utbildningsdepartementet och som kursplaneskrivare för Skolverket. Det har blivit alltmer uppenbart för mig hur torftig klassrummets och undervisningens organisation är i ungdomsskolan, kanske speciellt vad gäller matematikämnet. Att sitta still i bänken med enbart papper och penna till hands, både för lärande och för redovisning av kunskaper har blivit något av ämnets signum enligt de granskningar på fältet som gjorts på senare år.[10]

Alla lärprocesser är väl i någon mening estetiska (i meningen *sinnliga*) hur torftiga de än är eftersom de inbegriper aktiviteter som läsa, skriva, lyssna, så det handlar snarare om möjligheter att berika, utvidga och mångfaldiga utifrån denna torftiga sittandets estetik. Det är därför som det är så angeläget idag att lära av de estetiskt verksammas kompetens och rika repertoar.

Samtidigt måste man beakta att många av skolans problem egentligen är politiska och ekonomiska makroproblem på nationell nivå. Det kan bli ett hån mot den enskilde läraren och mot lärarkåren att ”delegera” sådana problem till klassrummet, en plats (bland andra) där sådana problem *visar sig* men inte uppstår och inte heller kan lösas. Och olika estetiska satsningar riskerar att utarmas och misslyckas av samhälleliga orsaker som ligger långt bortom de inblandades möjlighet att påverka. Utsatt för en sådan institutionaliserad press blir risken uppenbar att det estetiska perspektivet inte kommer att användas för att *didaktiskt* utmana, kritiskt granska och utveckla undervisningen vad gäller såväl form som innehåll. I stället kommer estetiken att sprayas ut som ett slags ”parfym” för att lindra, dämpa och avleda klassrumssituationens socioekonomiska orimligheter.

Uppluckring av bastionen

Syftet med denna artikel är *indirekt* i den meningen att jag inte kommer att ge några konkreta förslag på aktiviteter i matematikundervisningen som skulle kunna definiera eller vara typiska för estetiska lärprocesser.[11] I stället tänker jag peka på vissa särdrag vad gäller såväl skolämnet matematik som den vetenskapliga disciplin som kallas matematik. Framför allt vill jag lyfta den omfattande ”interna” kritik av ämnets och lärandets utformning

---

[10] Skolinspektionens kvalitetsgranskningar av undervisningen i matematik 2009 och 2010 för grundskola och gymnasieskola.

[11] Jag föreställer mig här att ett intensivt samarbete och utbyte av kunnande mellan estetiskt yrkesverksamma och matematiklärare är nödvändigt.

som levererats av såväl matematiker som matematikdidaktiker det senaste decenniet. Det mesta av denna kritik är okänd såväl för lärarkåren som bland estetiskt yrkesutövande, i stället dominerar vanligen föreställningar om ämnet som är hämtade från dessa gruppers egen skoltid. Kritiken innebär i praktiken en ”uppluckring” av våra föreställningar om ämnet, och i den jordmån som då uppstår kan estetiska dimensioner och förhållningssätt få fäste och blomstra. Jag tänker mig en estetisk lärprocess som inte bara underlättar lärandet av ett redan färdigt pensum, utan även utmanar vårt begreppsliggörande och språksättande: själva *ämnet* förblir inte (och bör inte förbli!) detsamma efter att ha utsatts för den estetiska blicken.

Även *forskning om estetiska lärprocesser* har på senare år tagit fart. Ett exempel är de forskargrupper som bildats på olika lärosäten. Några forskningsområden som är aktuella för dessa är att utforska olika former av gestaltande (producerande och performativa) traditioner, bygga upp studiomiljöer (till exempel digitala ateljéer), producera multimodala elevuppgifter (som inte enbart är skriftspråkliga) och iscensätta så kallade *lesson/learning studies* för att få grepp om olika former av estetiskt och praktiskt kunnande.[12] Alla dessa forskningsområden har enligt min mening mycket stor relevans för våra möjligheter att gestalta matematik som en praktik och för matematiklärandets former.

Vi gläntar lite på dörren till köket

En av de första som i vår tid uppmärksammade den tysta matematiska praktiken var den ungerskfödde matematikern George Polya i boken *How To Solve It.*[13] Boken spelar fortfarande en stor roll inom matematikdidaktiken och förmågan till problemlösning har skrivits fram som ett centralt mål både i svenska och internationella kursplaner i matematik på alla stadier. Nu menar inte Polya att problemlösning handlar om att lösa rutinproblem

[12] Exemplen är hämtade från Stockholms universitet våren 2013.

[13] George Polya, *Problemlösning. En handbok i rationellt tänkande*, övers. Thorbjörn Lagerwall (Stockholm: Prisma, 1970).

med självklara redan inövade metoder. Tvärtom handlar verklig problemlösning om att ställas inför något man inte sett tidigare. Frågan är ”Vad ska jag göra när jag inte vet vad jag ska göra?” Polya myntar här ett nytt uttryck för att täcka vad han menar: *heuristik*, det vill säga konsten att finna. Hans tänkande har fått stort genomslag och har utvecklats och förfinats genom åren. I den nuvarande nationella satsningen på matematik sammanfattas förmågan problemlösning som följer:

En övergripande strategi för problemlösning är att först sätta sig in i problemets villkor och frågeställning, sedan göra upp en preliminär plan, genomföra planen och till sist se tillbaka och granska lösningen för att se om den verkligen håller. Utöver denna övergripande strategi finns ett antal heuristiska principer som är direkt kopplade till vilket slags problem man har att göra med. Principerna kan inte tillämpas rutinmässigt utan bör ses som olika förslag på hur man på flera olika sätt kan närma sig problemet. De påminner om de tumregler som erfarna hantverkare brukar förmedla till nybörjaren. Om man redan tidigare har löst många andra problem blir det ofta lättare att välja ut lämplig strategi för just det problem man nu arbetar med. Tumreglerna fylls helt enkelt av mening hämtad från den egna personliga praktiken.[14]

Några av Polyas mer avancerade heuristiska metoder är följande:

Lös ett likartat men enklare problem: När man löser ett enklare och liknande problem än det man egentligen har, kan man få syn på mönster eller hitta metoder som sedan kan användas till det ursprungliga problemet.

Rita en figur: Många problem blir överskådligare om man kan överföra dem till en figur. Själva ritandet ställer krav på en själv att verkligen sätta sig in i vilka förutsättningar som gäller och en annan form av klargörande gestaltning av problemområdet kan därmed komma till uttryck.

[14] Sammanfattningen är en bearbetning av en inledande text i det så kallade Matematiklyftet, 2012-2016.

Försök minnas om du löst ett likartat problem: Har man löst ett liknande problem tidigare, kan man försöka minnas lösningen eller aktualisera använda begrepp och samband genom att tänka analogiskt i stället för teoretiskt.

Sök efter mönster: Om man inte kan hitta lösningen kan man göra ett antal gissningar för att se om något mönster framträder i beräkningarna. Mönstren kan fungera som vägvisare och varningsskyltar även om gissningarna är felaktiga.

Arbeta baklänges: Vissa problem består av en serie procedurer där man känner till resultatet men inte det ursprungliga som söks. Då kan det vara effektivt att arbeta stegvis baklänges med motsatta räknesätt. Om proceduren i ett steg innehåller division, kan man nu använda motsvarande multiplikation och så vidare. Ska man gå tillbaka från mål till start på en stig får man byta ut alla ”ta vänster” mot ”ta höger” och så vidare.

Argumentera för en gissning: Man kan försöka gissa svaret och sedan argumentera för det. Visar det sig vara fel, har man ändå lärt sig något och kanske kan man utesluta en stor mängd alternativ. Har man gissat rätt och sedan lyckats bevisa att det är rätt, så är det en korrekt lösning. I många fall består även matematisk forskning av kloka intuitiva gissningar som sedan mödosamt måste bekräftas av deduktiva resonemang.

Hitta motexempel: Ska man undersöka om ett påstående är allmängiltigt kan man först i stället försöka hitta ett motexempel. Lyckas man inte med det kan man försöka bevisa allmängiltigheten. Ett enda motexempel har större logisk kraft än många exempel som ger stöd åt ett generellt påstående.

Låt problemet arbeta: Man sätter in några olika förenklade värden på allt som är okänt för att se vad som händer. Är det något som förblir konstant? Hur ser olika samband ut när man gör en tabell, och så vidare. Det dynamiska avslöjar ofta vad som är stabilt till skillnad från det statiska där allt får samma dignitet.

Utnyttja symmetrier: Inte bara inom geometrin utan även inom området algebra kan symmetriska uttryck vara till hjälp för att upptäcka samband eller ge idéer för gissningar. Ofullständiga symmetrier ropar på att bli kompletta.

Välj en effektiv notation: En bra notation av till exempel ett geometriskt problem gör det möjligt att skriva ner exakta påståenden, slutsatser och gissningar så att man kan gå vidare och/eller gå tillbaka.

Testa med extrema värden: Om något kan variera till exempel mellan 0 och 5 så kan man sätta in dessa extrema värden i problemställningen för att se vad som händer. Det extrema kan få problemet att bryta samman och avslöja sitt inre.

Argumentera med hjälp av en motsägelse: Vad skulle det innebära om man antog att motsatsen till den intuitiva gissningen vore korrekt? Jo, skulle det motsatta svaret leda till motsägelser i problemet, så måste gissningen vara korrekt.

Lägg till hjälpkonstruktioner: Speciellt då det gäller geometriska problem kan det vara bra att göra hjälpkonstruktioner. Man kan till exempel dra höjder till inblandade trianglar, dra linjer mellan skärningspunkter eller markera alla räta vinklar. Plötsligt kan då nya samband och mönster avslöja sig.[15]

Som synes är dessa ”tumregler” för problemlösning mycket bredare än själva matematikämnet. De beskriver snarast en rationell problemlösande praktik inom nästan vilket ämne och yrkesområde som helst.

Att kunna lösa problem uppfattas idag inom utbildningssystemet som en central kompetens, eller *förmåga* enligt våra kursplanetexter. Tillsammans med sin arbetsgrupp gjorde den danske matematikdidaktikern Mogens Niss en pionjärinsats på detta område under nittiotalet. Resultatet av deras arbete publicerades i en rapport som fick en avgörande betydelse för målskrivningar i svenska (och nordiska) kursplaner i matematik.[16] Den grund-

---

[15] Punkterna om heuristik är en sammanfattning från Polyas bok *How To Solve It*.

[16] Mogens Niss & Tomas Højgard Jensen (red.), *Kompetencer og matematiklæring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark* (København: Undervisningsministeriets forlag, 2002).

läggande idén är att utveckla en matematisk praktik som innehåller ett förhållningssätt som är mycket bredare än själva det matematiska innehållet. I själva verket skulle den problemlösande attityden kunna ingå i ett modernt personlighetsutvecklande bildningsbegrepp. Hur ska man som människa annars möta och förhålla sig i ett komplext, socialt, kunskapsberoende, kommunikativt, multimodalt, moraliskt och politiskt divergent och globalt samhälle?

Vad är matematik för någonting, egentligen?

Mogens Niss menar att man som matematikutbildare måste ha klart för sig vissa grundläggande frågeställningar angående matematikens natur. I boken *Matematikken och verden* formulerar han ett antal frågor, som med filosofiskt språkbruk skulle kunna beskrivas som *ontologiska*. Han beskriver också hur han själv uppfattar matematisk verksamhet:

> Matematiken ses i denna bok som ett ämne som utvecklas och utövas av människor som inte är annorlunda än folk är mest. Ett ämne som rymmer mångfaldiga förbindelser med världen, ända från det dagliga livet i samhället till de högsta och djupaste och djupaste kunskapsteoretiska frågorna.[17]

Här följer Niss frågor:

– Hur kommer det sig att matematik kan handla om något annat än sig självt? Det verkar ju som att man med hjälp av matematiska resonemang också får möjlighet att analysera och förstå den empiriska världen.

– Är de matematiska objekten uppfunna eller upptäckta? Hur kommer det sig att olika kulturer oberoende av varandra verkar ”upptäcka” samma begrepp, till exempel begrepp som cirkel och primtal.

---

[17] Mogens Niss, *Matematikken och verden* (København: Fremad, 2001), s. 8.

– Vad menas med sanning i matematiken? När det gäller andra vetenskaper så krävs att det sanna påståendet på något sätt överensstämmer med verkligheten. Men i matematiken härleds sanningarna med logik. Ett logiskt korrekt bevis för Pythagoras sats är alltså avgörande, medan mätningar av tusentals rätvinkliga papperstrianglar är helt betydelselös, möjligen kan de ge en del idéer om vad som ska bevisas.

– Vilken roll spelar det matematiska symbolspråket för matematiken? Är det bara förkortningar? Så sent som under renässansen skrevs nästan all matematik på hemspråket, man hade inte ännu uppfunnit symboler för variabler, konstanter och de flesta matematiska operationer.

– Hur kan det vara möjligt att forska i matematik? Att deducera något logiskt är ju bara att säga samma sak men med andra begrepp. Man borde inte som i empiriska vetenskaper kunna upptäcka något verkligt nytt överhuvudtaget.

– Hur beror matematikens utveckling på samhälle, kultur och tid? Kan en matematisk sanning bli föråldrad eller värdelös beroende på tid och samhällsanda?

Niss frågor är uppfordrande: kanske borde mer av dagens matematikutbildning försöka gestalta dessa? Vilken estetisk dramatik finns inte att hämta här! Är det en del av modern bildning att kunna resonera kring sådana frågor, att upprätthålla och gestalta frågorna, inte nödvändigtvis att försöka besvara dem? Är det dags att överlåta själva räknandet till miniräknare och datorer?

Vilken matematik vill vi ha, egentligen?

Just frågan om matematikens beroende av samhället har undersökts av matematikdidaktikern Paul Ernest och presenterats i *Why Teach Mathematics*?[18] Speciellt har han tittat på vilka påtryckningsgrupper som förekommer när det gäller skolmatema-

[18] Paul Ernest, ”Why Teach Mathematics”, i S. Bramall & J. White (red.), *Why Learn Mathematics* (London: Bedford Way Papers, 2000).

tikens innehåll och utformning. Han identifierar fem sådana grupperingar, typiska för Storbritannien och troligen även för Sverige. Matematik handlar alltså inte bara om de personer som finns i köket och de som serverar i matsalen. Ämnet handlar också om vilka som äger restaurangen och bestämmer själva matsedeln:

Industrial trainers betonar att det viktigaste är att befolkningen behärskar enkel grundläggande matematik. Tanken är kopplad till att näringslivet behöver arbetskraft som kan ha tillräckliga färdigheter för att klara enklare arbetsuppgifter. En annan gruppering med inriktning mot näringsliv och samhälle är *technological pragmatists* som mer betonar förmågan att lösa problem med matematikinnehåll inom storföretagsamheten och informationsteknologin. En tredje grupp är *old humanists* som slår vakt om matematikens renhet och skönhetsvärden. Ämnet anses av dessa ha ett egenvärde som kulturprodukt och som föredömligt exempel på rigoröst tänkande. Den fjärde gruppen kallar Ernest *progressive educators*, typiska representanter för progressiv pedagogik. Här betonas i stället ämnets betydelse för elevens självförtroende, kreativitet och livskvalitet. Till sist identifierar han också gruppen *public educators* som består av socialister och vänsterliberaler. För dessa är kunskaper i matematik viktiga för att uppnå rättvisa och jämlikhet i samhället. Eleverna ska i första hand stärkas i sin kompetens som samhällsmedborgare och utveckla en reell kapacitet till kritisk granskning och analys av samhällsproblematik. Inom alla dessa grupperingar förekommer även idéer om matematikens natur, något som kan bli avgörande när det gäller innehåll och mål också för skolämnet matematik.

Just nu anses ofta bland politiker och opinionsbildare att kunskaper i ämnet hos befolkningen är intimt förknippad med teknisk och ekonomisk utveckling i vår tids globala konkurrenssituation. Det finns dock ingen vetenskaplig undersökning som har kunnat visa på ett sådant enkelt samband. Men att lyckas väl i internationella jämförelser i matematik har ändå blivit ett viktigt mantra i våra skolpolitikers föreställningsvärld. Vissa forskare ifrågasätter idag starkt matematikens ställning som skolämne och menar att ämnets betydelse är systematiskt överdriven i styrdokument och kursplaner.[19]

På vilka platser kan man lära sig matematik?

En fråga kopplad till yrkesliv och praktisk kunskap är *var* och *hur* man ska lära sig matematik och även hur ett matematiskt kunnande ska redovisas.[20] Ska man till exempel anse att en plåtslagare, snickare eller skulptör har ett matematiskt kunnande även om hen inte kan formulera det i skrift? Duger det att *göra* och *visa* i stället för att skriva och tala? Och måste man just sitta i ett klassrum i en bänk med papper och penna till hands då man ska lära sig matematik? Hur kommer det sig då att matematiskt oskolade praktiker ibland kan lösa avancerade tekniska problem som ingenjörer med hela sin matematiska arsenal inte kunnat lösa? När vi studerar det *rum* som plåtslagaren arbetar i kan man lägga märke till vilken rikedom av material och verktyg som alltid finns att tillgå. Plåtslagaren är också hela tiden i rörelse, synar krökningen på sin blivande ventilationstrumma, stryker med handen över en svetsfog, låter en hel arsenal av verktyg bli en naturlig utvidgning av den egna kroppen. Jämför man denna praktik vad gäller ”ytliga” fenomen som rum, verktyg och kropp med vad ett ordinärt klassrum kan erbjuda, blir man häpen. Förmedlingen av kunskap och också redovisningen av kunskap i klassrummet är nästan uteslutande muntlig och skriftlig. Det är en sittandets ödsliga pedagogik utan vare sig verktyg och material och med en stark övertro på att ordet ständigt är förbundet med en välbestämd innebörd. Historiskt kan man spåra en påverkan från de medeltida katedralskolornas rumsliga utformning. Då handlade det verkligen om att förmedla Ordet och för

---

[19] Sverker Lundin, *Skolans matematik. En kritisk analys av den svenska skolmatematikens förhistoria, uppkomst och utveckling* (Uppsala: Uppsala universitet, 2008).

[20] Lars Gustafsson & Lars Mouwitz, *Validering av vuxnas kunnande – med rättvisa i fokus* (Göteborg: NCM, Göteborgs universitet, 2008).

studenten att kunna återge Ordet. Orsaken var enkel: ordet var heligt och skulle inte ifrågasättas eller revideras bara återges så exakt som möjligt. Att lära var att memorera ord.[21]

Varifrån kommer matematiken, egentligen?

En av de mer omtumlande böckerna om matematikens ursprung som kommit på 2000-talet har skrivits av kognitionsforskarna George Lakoff och Rafael E. Núñes, den förre med inriktning mot lingvistik och den senare mot psykologi. Boken, som först kom ut år 2000, med den lätt hisnande titeln *Where Mathematics Comes From. How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being* upprörde en hel forskarvärld av matematiker och matematikdidaktiker. Redan förordet provocerade många:

> Det mesta av vårt tänkande och våra begreppssystem är en del av vårt kognitivt omedvetna. Vi människor har inte direkt tillgång till våra djupaste förståelseformer. Den kognitiva vetenskapens analystekniker är nödvändiga om vi ska kunna förstå hur vi förstår. Ett av våra stora fynd är att våra idéer har formats av vår kroppsliga erfarenhet.[22]

Den kognitiva vetenskapen har enligt författarna funnit vissa grundläggande sanningar: Medvetandet är förkroppsligat, den detaljerade utformningen av våra kroppar, våra hjärnor samt vårt vardagliga sätt att fungera strukturerar i alla avseenden människans begrepp och förmåga att resonera. Det mesta av våra tankar är omedvetna i den meningen att de inte är åtkomliga för vår introspektion. För det mesta konceptualiserar människan sina abstrakta begrepp i konkreta termer, genom att använda resonemang som är basala för vårt senso-motoriska system, vanligen med hjälp av så kallade *konceptuella metaforer.* Dessa

---

[21] Anders Piltz, *Medeltidens lärda värld* (Stockholm: Carmina, 1978).
[22] George Lakoff & Rafael E. Núñes, *Where Mathematics Comes From. How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being* (New York: Basic Books, 2000), s. xiii-xiv.

metaforer är således baserade på våra gemensamma erfarenheter av att vara mänskliga kroppar som befinner sig i världen och hanterar materiella föremål. Därför kan de matematiska idéer som växt fram ur metaforerna till stor del också förstås i gemensamma vardagliga termer.

Till de två kognitionsvetarnas stora förvåning stötte de på ett starkt och ibland hätskt motstånd av närmast religiös karaktär bland vissa matematiker och matematikanvändare. Till sist sammanfattade de denna ”matematiska motståndsideologi” och gav den namnet *The Romance of Mathematics* (ungefär ”det matematiska svärmeriet”). Kärnan i denna ideologi var att matematiken har en objektiv existens som människan kan ”upptäcka” och att matematik var det ”språk” som hela vår empiriska tillvaro var uppbyggt av. Matematikern framställdes snarast som en mystiker som hade kontakt med andliga hemliga världar och naturvetaren som någon som med matematiken som nyckel kunde dyrka upp och beskriva den materiella världens alla dolda lagbundenheter och samband. Nunes och Lakoff sammanfattade denna romantiska föreställning så här:

– Matematiken är abstrakt och okroppslig – ändå är den verklig.

– Matematik existerar objektivt, och levererar struktur åt vårt universum och alla tänkbara universa, oberoende och transcendent relativt mänsklig existens och alla andra varelser.

– Mänsklig matematik är bara en del av den abstrakta, transcenderande matematiken.

– Därför är det möjligt att via matematiska bevis upptäcka transcendenta sanningar om vårt universum.

– Matematik är en del av vårt fysiska universum och erbjuder en rationell struktur åt det.

– Matematik karakteriserar också logik, och därmed strukturerar den förnuftet självt – varje form av förnuft hos varje tänkbar varelse.

– Att lära sig matematik är därför att lära sig naturens språk, ett sätt att tänka som måste delas av varje högintelligent varelse var som helst i universum.

– Eftersom matematiken är okroppslig och förnuftet är en slags matematisk logik, så är själva förnuftet också okroppsligt.

Idémässigt representerar dessa föreställningar ett tankegods som växte fram under antiken. Punktlistan påminner även i hög grad om den så kallade universaliestriden som utkämpades mellan teologer under högmedeltiden. Konflikten handlade om vilken typ av existens de så kallade allmänbegreppen har. De fyra första punkterna i listan kan direkt återföras till Platons syn på matematikens natur och övriga punkter kan återföras till Aristoteles *episteme*, hans logiska verktyg för deduktion och hans definitionslära.[23] Lakoffs och Nunez invändningar mot ”romancen” är precisa och konkreta:

> Mänsklig matematik kan inte vara en underavdelning till en abstrakt, transcendent matematik. I stället, verkar det som om matematik, som vi känner till den, växer fram via våra hjärnors natur och våra kroppsliga erfarenheter. Som en konsekvens, verkar det som om varje del av denna ”romance” är falsk, av skäl som vi nu ska diskutera.

Därefter går författarna igenom ett antal matematiska begrepp och visar hur de metaforiskt är kopplade till våra vardagserfarenheter. Först ger författarna några exempel på konceptuella metaforer från andra områden än de rent matematiska för att läsaren ska få ett hum om vad som menas: *Betydelsefullhet* konceptualiseras med hjälp av storlek: ”Han var en gigant inom förpackningsindustrin”. *Likhet* med hjälp av närhet: ”Dessa färger ligger mycket nära”. *Svårigheter* som fysiska bördor: ”Han är nedtyngd av bekymmer” *Organisationsstruktur* som om den var en materiell struktur: ”Den här teorin är full av hål”.

[23] Ola Helenius & Lars Mouwitz, *Matematiken – var finns den?* (Göteborg: Göteborgs universitet, 2009), s. xvi.

Därefter går de över till matematiska begrepp och regler och visar systematiskt hur dessa är kopplade via konceptuella metaforer till vardagligheter. Begrepp som storlek, skillnad, likhet, addition, subtraktion, tallinjen, talet noll etcetera är alla direkt knutna till vårt vardagliga sätt att hantera kollektioner av föremål. När det gäller till exempel grafer för funktioner motsvaras de av färdvägar med rastplatser, resmål, stigningar och sänkningar, start och målgångar och så vidare.

En särskild poäng är att metaforiken inte enbart förklarar uppkomsten av de matematiska begreppen. Vi *förstår* också matematiska begrepp med hjälp av metaforer. I de fall då metaforer kommer i konflikt kan detta göra förståelsen problematisk. Ett tal kan till exempel uppfattas som antalet objekt i en kollektion, medan en tallinje snarast associerar till en mätning av ett föremåls längd. När negativa tal placeras på tallinjen blir också riktningen viktig: en kollektion kan ju inte bestå av ett negativt antal, och ett föremål kan ju inte ha en negativ längd.

Det matematiska köket

Huvudsyftet med denna artikel har varit att ge några exempel på hur matematiker och matematikdidaktiker har uppmärksammat det matematiska köket. Den tidigare självtillräckliga matematiska *romancen* har börjat ge vika för ett mer nyfiket och inbjudande förhållningssätt. Just här finns stora möjligheter att återupprätta matematik som bildningsämne och som en av människans stora kulturella landvinningar. Ur didaktisk synvinkel öppnas samtidigt nya möjligheter när det gäller att uppmärksamma och levandegöra innebörden av matematiskt arbete, till skillnad från att memorera färdiga slutprodukter. I de kursplaner i ämnet som sjösätts i Sverige och internationellt idag lyfts särskilt olika ämnesövergripande aspekter på matematisk förmåga som att kunna lösa problem, att kunna gestalta och kommunicera i ämnet, samt förmåga att se sammanhang och relationer mellan olika matematiska begrepp, områden och praktiska tillämpningar.

Estetiskt verksamma har här fått en stor och viktig bildnings- och utbildningsuppgift när det gäller att gestalta och levandegöra den glada och kreativa verksamhet som pågår i det matematiska köket. Må ingen nöja sig med att enbart stirra på de färdiga upp-läggen på tallrikarna. Det är hög tid att röra om i grytorna.