Elevers strategianvändning vid arbete med problemlösning

- En studie om elevers individuella utveckling av strategierna de använder vid samtal i heterogena grupper med fokus på cirkelns area.

Av: Tara Jaddo

Handledare: Natalia Karlsson

Södertörns högskola | Institutionen för lärarutbildningen

Kandidat/Magisteruppsats 15 hp

Självständigt arbete 1 | 7:de terminen 2021

Grundskollärarprogrammet med interkulturell profil mot årskurs 4–6

SÖDERTÖRNS HÖGSKOLA | STOCKHOLM
sh.se

English title: Students' strategy uses in the calculation of the area of the circle -*A study of students' individual strategy development when discussing in heterogeneous groups with a focus on the concept of area*.

Keywords: Mathematics, Area, heterogeneous groups, students' use of strategy

Nyckelord: Matematik, Area, heterogena grupper, elevers strategianvändning.

Abstract

This study aims to investigate students’ strategy use in performing problem-solving tasks about the measurement of a circle's area, and whether the students' individual strategy thinking develops during discussions about strategic choices in heterogeneous groups.

The theories that are linked to this study are Strategy use, Heterogeneity, and Classroom norms. The theories about strategy use are about the student’s choice of strategies and about the students' understanding of the strategy they choose to use. The theory about Classroom norms indicates that teachers and other students influence students' mathematical reasoning and calculation. Finally, the theory about Heterogeneity, tells us how students' different knowledge levels, backgrounds and experiences influence the development of mathematics.

The study was implemented in two classes from year six in primary school, where a total of four heterogeneous groups from these classes were created. The students had to individually perform three problem-solving tasks which involved calculating the area of the circle. The students were taught different strategies for making these calculations and they could use any strategy. Students then discussed their solution strategies in groups before they had to solve the next task.

The results of the research show that the only relevant strategy used in the four groups was the multiplication strategy. The reason why the students used the multiplication strategy was directly connected to the classroom norms the teacher had presented. Therefore, students learned the multiplication strategy and they implemented it immediately without understanding why they calculated it in that way. Because the students only used one relevant strategy to calculate the area of the circle in all groups, there was no exchange of strategies. There was, however, an exchange of experience. Since the students who used irrelevant strategies understood how other students solved the problem-solving tasks about the area of the circle with the multiplication strategy. As a result of the discussions in heterogeneous groups, the students who used irrelevant strategies started using the multiplications strategy eventually.

1. Innehållsförteckning

2. Inledning

Problemlösningsuppgifter är något som alla elever möter vid matematikundervisningen. När jag tänker tillbaka på hur jag mötte problemlösningsuppgifter var det i läroboken som vi elever fick individuellt lösa uppgifter i. Det förekom inga gruppsamtal med andra klasskamrater om våra lösningsstrategier. Som elev hade jag svårt att lära mig formler utantill eftersom jag saknade en förståelse för formler. Läraren undervisade om formler för att lösa uppgifterna, men det jag alltid undrade var *varför? Varför behöver vi till exempel multiplicera pi med radien upphöjt till två för att mäta cirkelns area?* Vi lärde oss således att använda formler utan att förstå och reflektera över varför vi använde just dessa formler. Ett nyare styrdokument än det som fanns under min skoltid skrivs härmed som syfte i styrdokumentet:

> Eleven beskriver och samtalar om tillvägagångssätt på ett i huvudsak fungerande sätt och använder då konkret material, bilder, symboler och andra matematiska uttrycksformer. (Skolverket 2019)

Med detta menas att eleverna bör få samtala om deras användning av strategier.

Anledningen till att denna undersökning utförs är för att ta reda på vilka strategier eleverna använder vid beräkningen av problemlösningsuppgifter om mätningen av cirkelns area, samt syftet till att de använder just den strategin. Möjligheterna för utbyte av strategier om cirkelns area mellan eleverna vid samtal i heterogena grupper undersöks även i studien. I heterogena grupper har eleverna bland annat olika kunskapsnivåer, förkunskaper och bakgrunder (Fohlin 2000, s.185). Enligt Fohlin (2000, s.185) främjar heterogena grupper lärandet eftersom de skapar fler möjligheter för eleverna att lära sig av varandra apropå deras olika kunskaper, kön, erfarenheter och bakgrunder. Detta förutsätter för olika tolkningar, perspektiv samt förståelse (DiME 2007). Det blir därför intressant att undersöka ifall elevers användning av strategier påverkas av eller påverkar andra elever vid heterogena gruppsamtal. Kommer eleverna att implementera andra gruppdeltagarnas strategier till sin egen strategianvändning?

3. Syfte & Frågeställningar

Syftet med denna studie är att undersöka vilka strategier eleverna använder för att lösa uppgifter om cirkelns area samt varför de använder just den strategin. Det undersöks även ifall det uppstår något utbyte av strategier mellan eleverna i heterogena gruppsamtal samt om elevernas individuella inlärning påverkas av dessa utbyten. Detta kommer att besvaras genom följande frågeställningar:

1. Vilka strategier använder elever när de löser problemuppgifter om cirkelns area och varför?

2. Hur påverkas elevers individuella användning av strategier i heterogena gruppsamtal med fokus på lösningar av uppgifter om cirkelns area?

4. Bakgrund

I detta kapitel framställs och beskrivs centrala begreppen som benämns i studien.

4.1 Matematik

Matematik definieras som: "en abstrakt och generell vetenskap för problemlösning och metodutveckling." (NE, Matematik). Matematik beskrivs på det viset eftersom det är ofta oklart hur en uppgift ska lösas. Passande metoder behöver därför tillämpas för att lösa uppgiften. I kursplanen för ämnet matematik (Skolverket 2019) benämns det att matematik är en problemlösande aktivitet som utvecklar individen i sitt vardagliga liv, som bland annat i sociala sammanhang.

4.2 Varför problemlösning?

Problemlösningsuppgifter har varit en del av Sveriges kursplan sedan 1980 och har sedan dess haft en stor roll i skolan (Kilborn & Karlsson 2015a, s.26). Enligt Skolverkets kommentarmaterial (2017, s.7) är problemlösningsuppgifter sådana uppgifter som eleverna inte vet hur de ska lösa. Eleverna behöver pröva sig fram och använda olika lösningsstrategier för att kunna sätta problemlösningsuppgifter i bruk. Problemlösning beskrivs inte enbart som något okänt vi inte har bemött tidigare och kräver tänkande för att lösa, utan det är problem som vi bemöter i vardagen (jfr Kilborn & Karlsson 2015a, s.25).

När elever ska lösa problemlösningsuppgifter är tanken inte att de ska gissa sig fram till svaret. Eleverna ska genom uppgifterna både kunna lära sig begrepp inom matematiken samt olika lösningsstrategier (Kilborn & Karlsson 2015a, s.25). Det beskrivs att uppgifter som elever löser i skolan saknar oftast en vardagsanknytning. Elever lär sig att tillämpa formler för att svara på uppgifterna i läroböckerna, men när eleverna möter liknande problem utanför skolan kommer de lösa problemet med en annan strategi. Det är således viktigt att anknyta uppgifter till en vardaglig situation för att eleverna ska kunna tillämpa strategierna de lär sig i sitt vardagliga liv (Kilborn & Karlsson 2015a, s.24–25).

Det har visat sig att problemlösningsuppgifter är nyttjande för elevernas uppfattning av geometriska figurer samt relationen mellan olika geometriska figurer (Owens & Outhred 2006, s.105). För denna anledning samt med hänsyn till det som har nämnts ovan är problemlösning centralt för denna undersökning. Det vill säga att uppgifterna som eleverna kommer att lösa är problemlösningsuppgifter.

4.3 Lösningsstrategier

Det är inte alltid tillräckligt att använda formler utan att uppfatta dem. Det är viktigt att veta bakgrunden till strategin som används. Genom att veta hur formler och strategier är uppbyggda kan man lära sig nya lösningsstrategier. Vid det laget är eleverna kapabla till att lösa problem som de inte är bekanta med sedan tidigare. Eleverna kan göra det genom att bygga upp egna strategier (Kilborn & Karlsson 2015a, s.26).

Det förekommer många strategier för att lösa uppgifter om area, exempelvis genom multiplikation, att räkna bakifrån, illustration och räkna rutor. Det uppstår även situationer där elever använder irrelevanta strategier (jfr Huang & Witz 2013). Elever arbetar varierande med olika strategier beroende på deras förkunskaper, egna resonemang samt deras kunskapsintagning av undervisningen (jfr Jakobsson 2001).

När det gäller inlärningen av problemlösningsstrategier förekommer det fyra faser som Pólya (1970, s.26–27) framställer. Första fasen handlar om att ta reda på vad uppgiften söker samt vilken information uppgiften förmedlar, följaktligen behöver problemet uppfattas. Nästa steg är att utföra en plan på hur problemet ska lösas. Det första som ska utföras vid detta tillfälle är att tänka på ifall eleverna har bemött liknande uppgifter förr, för att sedan tillämpa de förkunskaperna eleverna har till denna uppgift. I nästkommande steg ska problemet beräknas, det vill säga genomföra planen som har planerats att utföra. Till sist ska det reflekteras över rimligheten av svaret och kontrollera resultatet; genom att kontrollräkna uppgiften.

4.4 Arean av geometriska figurer

I matematikundervisningen handlar geometri om avstånd, former, vinklar och ytor (Karlsson & Kilborn 2015b, s.145). Några kända geometriska figurer är: rektangel, triangel och cirkel. I denna studie är den geometriska figuren cirkeln att vara aktuell. Cirkeln har inga hörn och alla punkter har lika långt avstånd till medelpunkten. Från medelpunkten till cirkeln kallas det avståndet för radien. Om ett streck dras genom cirkeln, kallas det avståndet för diametern på cirkeln (Karlsson & Kilborn 2015b, s.165).

Mätning är något centralt inom geometri. Man vill till exempel mäta hur stor yta en form har; vilket kallas för area (jfr Karlsson & Kilborn 2015b, s.149). För att beräkna arean av en cirkel finns det en formel som är välkänd. Formeln ser ut på detta vis[1]: $A = \pi * r^2$. För att veta hur mycket en cirkel rymmer behöver vi multiplicera radien med sig självt samt multiplicera faktorn med pi (jfr Karlsson & Kilborn 2015b, s.149).

Som det beskrivs ovan multipliceras radien upphöjt till två med pi. Pi som även kan skrivas som: π. Pi är ett uttryck för kopplingen mellan diametern och cirkelns omkrets (NE, Pi). Pi är talet med flest decimaler i världen och kan avrundas till talet *3,14*.

4.5 Inkludering

Inkludering är ett specialpedagogiskt perspektiv och definieras som[2]:

> Inclusive education is about responding to diversity; it is about listening to unfamiliar voices, being open, empowering all members and about celebrating 'difference' in dignified ways" (Barton 1997, s.234)

Det handlar således om att kunna acceptera alla individers olikheter. I denna studie är begreppet heterogenitet centralt. I heterogena grupper är det viktigt med inkludering mellan eleverna för att de ska kunna föra ett gruppsamtal.

4.6 Heterogena grupper

Vad innebär det att diskutera i heterogena grupper? Heterogena grupper beskrivs av *Nationalencyklopedin* som: "En heterogen grupp till exempel kan bestå av flera olika sorters medlemmar." (NE, Heterogen). Med det menas att när elever är i heterogena grupper är de olika. Olikheter kan bland annat handla om kunskaper, kön, erfarenheter och bakgrunder (DiME 2007)[3].

Enligt en studie om elevers ambition och interaktion i grupp av Frykedal (2008) via Linköpings universitet beskrivs det att heterogena grupper ger möjlighet för eleverna att ta del

---

[1] Beteckningen för Multiplikation skrivs som: * i denna studie. En beteckning för Radien är: r.
[2] Citatet är inspirerat från boken: *Inkludering och måluppfyllelse, att nå framgång med alla elever* av Bengt Persson. Som även använder samma citat.
[3] DiME är förkortning för: Diversity in Mathematics Education Center for Learning and Teaching

av olika perspektiv. Faktorerna som gör att heterogena grupper blir heterogena enligt Frykedal (2008) är vilka personliga mål deltagarna har samt tilliten gruppdeltagarna har till varandra.

4.7 Gruppsamtal

Denna undersökning behandlar elevers samtal kring deras tillämpning av strategier efter att de har löst uppgiften individuellt. Kilborn & Karlsson (2015a, s.31) skriver att det är lämpligt att låta elever resonera i mindre grupper. Vid gruppsamtal ökar möjligheten till att elever ska kunna ta del av andra elevers resonemang och användning av strategier.

5. Teorianknytning

I denna del kommer teorierna som kopplas till studien att benämnas och förklaras. Studien utförs deduktivt, där teorierna som framställs i detta avsnitt kommer att prövas i undersökningen. I kapitlet *8. Resultatet* kommer det att framställas hur teorierna fungerade i undersökningen (jfr Svensson 2015, s.218).

5.1 Lösningsstrategier för cirkelns area

I denna studie undersöks vilka strategier elever använder och varför; som det framställs i första frågeställningen. De teorier som presenteras i denna del om lösningsstrategier för cirkelns area kommer att undersökas vid observationen. Det kommer att utformas ett observationsschema för att underteckna lösningsstrategierna som förklaras i denna del.

5.1.1 Upprepad addition

Owens & Outhred (2006) [4]skriver om vilka strategier som oftast används när elever beräknar area. Vissa elever beräknar area genom att använda upprepad addition. Om vi utgår från exemplet: *Radien=3*, då ska eleven istället för att multiplicera $r^2 = 3*3$ räkna på detta vis: $r^2 =3+3+3$. Detta är något som även Karlsson & Kilborn (2018) skriver om i sin studie angående vilka räknemetoder elever väljer när de använde huvudräkning. Denna typ av strategi kallas för kommutativa lagen.

5.1.2 Illustrera & räkna rutor

En annan strategi som kan användas för att beräkna cirkelns area är att rita upp kolumner eller rader i geometriska figuren, för att sedan räkna rutorna i figuren. Där antal rutor är visar hur många kvadratcentimeter cirkeln rymmer (Owens & Outhred 2006). Owens & Outhred (2006, s.98) skriver vidare att illustration är en bra metod för att få eleverna att förstå geometri och beräkningen av geometriska figurens area på ett konkret sätt.

5.1.3 Multiplikationsstrategin

Det förekommer dessutom att elever använder multiplikation vid beräkningsprocessen (Owens & Outhred 2006, s.102). För att beräkna arean av en cirkel med

[4] Strategierna som beskrivs (5.1.1, 5.1.2 och 5.1.3) är inspirerade från: Huang. H & Witz. K (2013). *Children's Conceptions of Area Measurement and Their Strategies for Solving Area Measurement Problems.* Taipei Municipal University of Education: Taiwan.

multiplikationsstrategin multipliceras radien med sig själv och därefter multipliceras faktorn med pi. På det viset är det känt hur många kvadratcentimeter cirkeln innehåller (Karlsson & Kilborn 2015b, s.149).

5.1.4 Metoder i form av algoritmer inom Multiplikationsstrategin

Vid användningen av multiplikationsstrategin förekommer det olika algoritmer som kan användas, som exempelvis kalkyl eller skriftlig huvudräkning. Skriftlig huvudräkning handlar om multiplikation och division vid detta fall. För att beräkna med skriftlig huvudräkning inleds processen med att multiplicera entalen först, sedan skrivs entalet under likhetstecknet och tiotalet sparas i minnet eller skrivs över tiotalet. Därefter multipliceras tiotalet och adderas till tiotalet som sparades sedan tidigare (jfr Karlsson & Kilborn 2015a, s.86). Det finns många olika strategier för huvudräkning som går att använda, men detta är den mest använda av dem.

Att använda en miniräknare är betydligt enklare än huvudräkning. Därför väljer elever att beräkna med hjälp av en miniräknare (Karlsson & Kilborn 2015a, s.72). Med en miniräknare skriver man in multiplikationstalet och efteråt kommer svaret fram på multiplikationen när det trycks på knappen med symbolen för likhetstecknet (=). I denna undersökning har eleverna tillgång till att använda miniräknare. Det blir intressant att se vilken algoritm eleverna väljer att använda sig av när de multiplicerar och dividerar.

Vid beräkningen av dessa algoritmer kommer eleverna att behöva avrunda decimalerna som de kommer att få ut från beräkningsprocessen. När eleverna beräknar med hjälp av kalkyl kan resultatet avrundas till ett begränsat antal decimaler, därifrån kan eleverna använda huvudräkning för att *avrunda*. Om eleverna väljer att beräkna med skriftlig huvudräkning kan de *avrunda* genom att räkna ut det med huvudräkning.

5.1.5 Dela upp multiplikationen eller multiplicera allt på en gång?

Förutom vilken algoritm eleverna använder vid multiplikationsberäkningen, förekommer det även elever som väljer att dela upp multiplikationen eller beräkna hela på engång (jfr Karlsson & Kilborn 2018). Karlsson & Kilborn (2018) skriver vidare att det är en metod för huvudräkning. Det går även att utföra detta med kalkyl. För att konkretisera detta mer skulle det se ut på detta vis: *radien* radien* först, därefter multipliceras faktorn med pi. Medan andra elever multiplicerar hela $A = \pi * r^2$ samtidigt för att mäta ytan av en cirkel.

5.1.6 Irrelevanta strategier

En del elever använder sig av strategier som inte leder till att mäta cirkelns area (Huang & Witz 2013). Till exempel kan elever blanda ihop strategier som används för andra beräkningar, exempelvis mätning av area för andra geometriska figurer än cirkeln. Owens & Outhred (2006, s.103) skriver att det förkommer att elever blandar ihop beräkningen av area och omkrets. Förmodligen kan detta uppstå när eleverna i denna undersökning ska beräkna arean av en cirkel.

5.1.7 Likhetstecken

Vid beräkningen av cirkelns area används likhetstecknet. Filloy & Sutherland (1996) skriver om ”lika med tecknet” och vikten för att eleverna uppfattar tecknets innebörd. Likhetstecknet är en beteckning för att synliggöra att det som står på båda sidorna av likhetstecknet motsvarar varandra. När eleverna förstår innebörden av likhetstecknet kan eleverna räkna på ett mer abstrakt sätt; det vill säga räkna med bland annat multiplikationsstrategin. Likhetstecknet handlar om att behärska en förståelse för rimlighet. När cirkelns area beräknas visar likhetstecknet resultatet. Med hjälp av ”lika med tecknet” reflekterar man över svarets rimlighet innan man skrivit ner den (Filloy & Sutherland 1996). I denna undersökning kommer det att observeras hur eleverna använder likhetstecknet kopplat till strategin de väljer att använda.

5.1.8 Elevers uppfattning om hur de beräknar

Filloy & Sutherland (1996) påpekar i sin teori att elever automatiskt börjar beräkna uppgifter utan att veta syftet till varför de gör på det viset. Ett exempel kan vara att de inte förstår varför man multiplicerar radien med sig själv. En lärare bör ingripa när eleverna inte förstår varför vi beräknar ut aren av figurer (Filloy & Sutherland 1996). Detta är aktuellt för syftet av denna studie där det undersöks ifall eleverna utvecklar sin lösningsförmåga när de diskuterar i grupp. Något som Filloy & Sutherland (1996) lyfter fram är att lärares undervisning i matematik kan skifta väldigt mycket även om lärarna följer samma läroplan. Därför kan det betyda att elever som har olika undervisare har fått lära sig olika strategier att arbeta med vid lösningen av uppgifter. I undersökningen som kommer att utföras har eleverna samma lärare men eleverna kan ha haft andra undervisare om de har bytt skola. Owens & Outhred (2006, s.101) skriver som Filloy & Sutherland (1996); nämligen att elever saknar uppfattning för hur de beräknar area. Många elever intresserar sig för att ta reda på talen som existerar. Eleverna vill till exempel veta hur lång radien är av en cirkel för att räkna ut det med en formel de har lärt sig att använda (jfr Owens & Outhred 2006, s.102).

5.2 Klassrumsnormer

Något som kan påverka vilken strategi eleverna använder är klassrumsnormerna. I denna studie går eleverna som deltog i samma skola med samma lärare. Det blir relevant att diskutera klassrumsnormer i denna undersökning för att läraren påverkar vilken strategi eleverna använder. Forskarna Cobb & Yackel (1996) skriver om sociomatematiska normer som handlar om klassrumsnormerna som finns. I undersökningen kom de fram till att läraren har en inverkan på hur klassrumsmiljön är. Lärarens matematiska värderingar, övertygelser samt förståelse är faktorer som påverkar elevernas undervisning. Normerna i ett klassrum kan både hindra och locka elevers intresse för matematik (Cobb & Yackel 1996). Med detta menas att elever påverkas av varandras tankar och idéer. Därför kan det innebära att elever är kapabla till att utvecklas genom heterogena grupper och kunna skapa en inkluderande miljö för att kunna tillfredsställa en bra klassrumsmiljö. Detta är något som även Owens & Outhred (2006, s.97) nämner; författarna skriver att andra elever, läraren samt materialet påverkar ledningsprocessen.

5.3 Heterogenitet

Att samexistera är en viktig faktor för att gruppsamtal ska kunna fungera därför är inkludering ett centralt begrepp för denna studie. I en heterogen grupp är eleverna olika, därför är det viktigt att alla deltagare accepteras och kan inkluderas i gruppsamtalet.

Heterogena gruppens funktion för olika kunskapsnivåer kommer att undersökas i denna studie, genom att blanda elever med olika kunskapsnivåer i grupperna. Fohlin (2000, s.185) nämner att alla elever utvecklas genom heterogena grupper men att de elever som har lägre kunskapsnivå utvecklas mest, eftersom eleverna som har högre kunskapsnivåer förklarar åt dem. Eleverna med högre kunskapsnivå utvecklas genom att formulera sig på olika sätt för att kunna förklara för eleverna med lägre kunskapsnivå hur problemet ska lösas (Jakobsson 2001). Cohen & Lotan (1995) skriver att elever som har högre kunskapsnivå lär sig bättre när de är placerade i homogena grupper eftersom de utvecklas mer när de kan diskutera och lyssna istället för att lära ut. Syftet för matematikämnet enligt läroplanen (jfr Skolverket 2019) är att alla elever ska utveckla sina kunskaper. Därför bör elever med högre kunskapsnivå även få utvecklas; de ska inte behöva ta rollen som lärare för andra elever. I denna undersökning kommer det att ta redas på ifall eleverna som har högre kunskapsnivå även kan utveckla sin användning av strategier eller annan kunskap.

Heterogenitet har en påverkan på elevernas lärande; det vill säga elevernas ekonomiska status, kultur och ras påverka deras syn på matematik (DiME 2007). Heterogeniteten ger möjlighet för utbyte av förmågor och strategier vilket nyttjar gruppdeltagarna eftersom de diskuterar alternativa lösningsstrategier (Forslund Frykedal 2008). Enligt Fohlin (2000, s.185) främjar heterogena grupper lärande eftersom det skapar fler möjligheter för eleverna att lära sig av varandra apropå deras olika kunskaper, kön, erfarenheter och bakgrunder. Detta förutsätter för olika tolkningar, perspektiv samt förståelse (DiME 2007).

Förutom skilda kunskaper förekommer det även elever med funktionsvariationer i ett klassrum som läraren bör ta hänsyn till när de ska placeras i heterogena grupper. Enligt Klang & et al (2020) behöver dessa elever oftast vara med en vän i en grupp för att de känner sig mindre trygga i en heterogen grupp. Därför kommer detta att tillämpas i undersökningen genom att låta elever med särskilda behov få vara med en kamrat i sin grupp för att de ska känna sig mer trygga.

Sammanfattningsvis innebär det att när elever är indelade i en heterogen grupp har dem olika syn på matematik, vilket kan leda till olika tankesätt och lösningsstrategier. Om denna undersökning visar att heterogena grupper fungerar, innebär det att eleverna har möjligheten att lära sig av varandra och att de elever som uppvisar svårigheter inom matematik får hjälp av sina kamrater. Om studien visar att heterogena grupper inte fungerar kan det vara för att alla elever inte utvecklas och otrygghet i den heterogena gruppen kan leda till att eleverna inte vågar berätta om sin användning av strategi.

5.4 Teorisammanfattning

I denna del har det beskrivits vilka teorier som är aktuella för studien. Undersökningen kommer att grunda sig på ovannämnda teorier för att besvara frågeställningarna. Förstnämnda teorin handlar om strategianvändningen eleverna kan välja att använda samt om vilken förståelse eleverna har för strategin de väljer att använda. Det skrevs även om vikten av likhetstecknet och hur den fungerar vid beräkningen av matematiska uppgifter.

Andra teorin handlade om klassrumsnormer som tyder på att lärare och andra elever påverkar elevers matematiska resonemang och beräkning. Därför kan deras val av strategi vara baserat på det läraren har lärt dem att använda vid beräkningen av cirkelns area. Elevernas strategianvändning kan även vara influerat av hur andra elever löser uppgifter, när en elev ser hur normen i klassrummet är. Exempelvis kan en elev i gruppen uppmärksamma att en annan elev beräknar cirkelns area med en annan strategi än den de själva använder. Därför implementerar den eleven strategin till sin lösning. På det viset kan det ske utbyte av strategier mellan eleverna vid denna undersökning. Det har till sist skrivits om heterogenitet, där elevers skilda bakgrunder, kunskapsnivåer och erfarenheter påverkar elevernas strategiutvecklingen i matematik.

6. Tidigare forskning

I denna del framställs vad tidigare forskning lyfter fram om elevers användning av strategier vid problemlösningsaktiviteter samt om heterogena grupper och dess funktion.

6.1 Inkludering genom lärande i grupp

Det pågår en studie som heter *Inkludering genom lärande i grupp*. Studien är finansierat av Vetenskapsrådet och utförs via Uppsalas universitet. Studien är framtagen av både matematikdidaktiker och specialpedagoger. Projektledaren är Nina Klang och de som är medverkande i studien är: Nilholm, Lindqvist, Karlberg, Svahn, Evaldsson, Eriksson, Karlsson och Kilborn. Undersökningen har pågått i fyra år och i 2020 publicerades en artikel om studien som har titeln: *Mathematical Problem-Solving Through Cooperative Learning—The Importance of Peer Acceptance and Friendships*. Klang & et al (2020) skriver i artikeln att elever med inlärningssvårigheter behöver mer stöd för att behärska problemlösningsstrategier. Elever kan ha svårt med att identifiera rimliga lösningar i ett problem, därför behöver de hjälp med att känna igen den bakomliggande formeln i problemet. Ett gynnsamt alternativ kan vara att de får stöd av andra elever eller läraren. Ett sätt för att förbättra elevers problemlösningsförmåga kan vara genom att eleverna får delta i smågruppssamtal. När elever ges möjligheten att arbeta i små grupper utvecklas deras lärande i matematik eftersom de kan: förklara sina lösningar, förstå hur andra elever tänker samt synliggöra deras tänkande (Klang & et al 2020).

Efter att forskningsgruppen (2020) summerade tidigare studier kom de fram till att grupparbete inte alltid är ett positivt arbetssätt, elever får sällan möjligheter till att uttrycka sina åsikter eftersom deras kunskapsnivåer skiljer sig åt. Det händer ofta att elever som är starkare i matematik tar över samtalet. Resultatet som de har fått på forskningen hittills är att elever med funktionsvariationer arbetar bäst i grupper med deras vänner än med andra kamrater. Därför bör lärare överväga att skapa inkluderande normer och stödjande kamratrelationer när det gäller att placera elever med funktionsvariationer i grupp enligt studien. Kravet på att lösa svårare problemlösningsuppgifter för dessa elever kan skapa negativa känslor och osäkerhet, då behöver eleverna stöd från sina kamrater. Därför bör de vara i grupp med personer de är mer trygga med.

6.2 Expanding Participation in Problem Solving in a Diverse Middle School Mathematics Classroom

Denna artikel är framtagen av Rutgers University i New Jersey, USA och är skriven av Weber, Radu, Mueller, Powell, & Maher (2010). Artikeln handlar om elevers deltagande i problemlösningsaktiviteter. Författarna framställer tre aspekter som påverkar elevers deltagande. Den första aspekten handlar om elevernas förväntningar över deras roll som elever. Andra aspekten handlar om elevernas olika sociala normer. Den Tredje aspekten handlar om hur en uppgift är strukturerad. Detta innebär att när elever deltar i en matematisk aktivitet, finns det en del faktorer som påverkar elevernas intagande. Vissa uppgifter engagerar eleverna till att delta medan andra uppgifter engagerar inte dem.

Det skrivs även om elevers tillämpning av strategier i studien, där det skrivs att elever imiterar oftast strategin som läraren har lärt dem att använda. Detta gör att elevernas deltagande begränsas eftersom de tillämpar endast en formel för att beräkna ut rätt svar. Därför föreslås det att läraren bör ge eleverna möjlighet till att arbeta med uppgifter som har ett öppet slut. Problemlösningsuppgifter som är öppna kan uppmuntra eleverna till att skapa nya representationer och både utveckla samt genomföra starka problemlösningsstrategier. Öppna uppgifter leder till fler strategier, det visades även positiva resultat vid användningen av uppgifter med fler korrekta svar, än ett rätt svar enligt skribenterna (Weber et al 2010).

6.3 Children's Conceptions of Area Measurement and Their Strategies for Solving Area Measurement Problems

Huang & Witz (2013) utförde en studie i Taiwan med titlen; *Children's Conceptions of Area Measurement and Their Strategies for Solving Area Measurement Problems*. Studien handlar om elevers användning av strategier när de löser uppgifter om triangelns area, kvadratens area och parallellogrammens area i årskurs fyra. I undersökningen observerades det ifall eleverna använde multiplikation, flerstegsstrategi eller ifall eleverna använde irrelevanta strategier.

I Huang & Witz (2013) studie diskuterades strategierna som var en del av undersökningen. För att förstå multiplikationsstrategin krävs det i första hand att eleverna lär sig om kvadratcentimeter. Läraren kan undervisa eleverna om kvadratcentimeter genom att rita upp kvadrater som är 1cm på alla sidor i en figur för att räkna hur många kvadratcentimeter det finns i figuren. På det viset kommer eleverna förstå att när vi mäter ytan av en figur, intresserar vi oss för att ta reda på hur många kvadratcentimeter en figur rymmer. Därefter förstår eleverna att de kan räkna med multiplikation för att multiplicera höjden med bredden eftersom det är ett snabbare alternativ. Multiplikationsstrategin är något som författarna (2013) menar är mer sofistikerat än upprepad additionsmodellen (det är när man istället för att multiplicera till exempel *3*3* adderar man talet 3 tre gånger, det handlar således om potenser).

Resultatet visade att majoriteten av eleverna använder multiplikationsstrategin, som exempel att multiplicera *höjden* med *basen* för att räkna ut arean för en rektangel. I diskussionen av resultatet påpekas det att eleverna har koll på hur man får reda på arean av geometriska figurer. Det som var intressant från denna studie är att det framkom att elever som hade en god strategianvändning vid lösningen av areauppgifter självkorrigerade sina misstag. Medan vissa elever uppvisade svaghet för att använda relevant strategi för den geometriska figuren och de blandade ihop formlerna för area och omkrets (Huang & Witz 2013).

6.4 Sammanfattning

I denna del har tidigare studier om heterogena grupper, problemlösningsuppgifter och area framställts. Med inspiration från dessa studier kommer det i nästa kapitel att kopplas till teorier som är aktuella för studien.

7. Metod

I detta avsnitt framställs det hur undersökningen kommer att utföras för att besvara frågeställningarna. Metoden för denna studie är utformad kvalitativt, genom fyra strukturerade observationer över elevers användning av strategier, elevers individuella strategiutveckling inom grupperna. Det kommer även att utformas en kort kompletterande gruppintervju för att få svar på det som inte framkommer i den strukturerade observationen. Vidare tas det upp vilka metodval som kommer att användas i studien, urval som utförs, datainsamlingsmetoden, etiska principerna och analysmodellen. Slutligen presenteras genomförandet av studien.

7.1 Metodval

Studien är kvalitativt utformad eftersom undersökningen utförs genom strukturerad observation och kort kompletterande gruppintervju för att inkludera delar som inte togs upp i observationen, för att frågeställningarna ska besvaras komplett. Ahrne & Svensson (2015, s.9) beskriver att undersökningar som bland annat observationer och gruppintervjuer är kvalitativa undersökningsformer.

En Strukturerad observation innefattar fasta regler för observationen. Reglerna handlar exempelvis om att berätta för deltagarna om hur observationen kommer att utföras och dokumenteras. I undersökningen finns det regler om att eleverna ska lösa en uppgift i taget. När deltagarna har löst första uppgiften individuellt, ska de sedan diskutera uppgiften i gruppen. När gruppsamtalet för första uppgiften är färdigt beräknar eleverna nästa uppgift. Förutom fasta reglerna i den strukturerade observationen, bör det finnas ett strukturerat sätt för att kunna registrera det som observeras (Bryman 2011, s.340). I denna studie struktureras två observationsscheman. Med hjälp av observationsschemat kan det uppmärksammas ifall det sker något strategiutbyte mellan deltagarna efter gruppsamtalet, när eleverna fortsätter med att lösa nästa uppgift.

För att minnas det som eleverna berättar vid transkriberingen, genomförs en inspelning av gruppsamtalet och av den kompletterande gruppintervjuerna. Genom denna metodanvändning transkriberas materialet mer detaljerat och noggrant (Bryman 2011, s.577).

7.2 Urval

I denna del framställs urvalen som utförs i undersökningen som: hur många grupper som undersöks, grupputformningen samt vilka problemlösningsuppgifterna som har vals.

7.2.1 Urval av grupp

Undersökningen kommer att genomföras i två klasser i samma skola. Båda klasserna är årskurs sex och har samma matematiklärare. Av dessa klasser kommer det att utformas fyra grupper, där det finns två grupper av varje klass med tre till fyra deltagare i varje grupp. Rekommendationen av denna gruppstorlek är framtagen av Fohlin (2000, s.184). För att samla in tillräckligt med empiri att stödja studien på valdes det totalt ut femton deltagare i studien. Det fanns fler elever som var villiga att delta i undersökningen men jag valde att endast medta femton elever. Ahrne & Svensson (2015, s.10–11) skriver att vid kvalitativa undersökningar ska det inte vara baserade på stora mängder av deltagare då det blir för stort resultat för att kunna analysera den kvalitativt.

Som tidigare benämnt i kapitel *5. Teorianknytning*, kommer grupperna vara heterogena. Gruppsammansättningarna kommer utföras av mig och läraren. Jag har möjlighet att strukturera grupperna på egen hand, men läraren känner eleverna bättre än mig. Läraren vet vilka kunskapsnivåer, funktionsvariationer och bakgrunder eleverna har. Därmed vet läraren vilka elever som ska placeras i vilken grupp. Heterogena grupperna kommer att struktureras med tanke på genus, kunskapsnivå och bakgrunder. Förutom det förekommer det elever som har funktionsvariationer i klassen där dessa elever har olika behov. När gruppsammansättningen utfördes berättade läraren att en del av deltagarna har diagnoser som till exempel ADHD och dyslexi, men att de är kapabla till att delta i heterogena gruppsamtal. Läraren berättade att det fanns en elev som har diagnosen autism och har behov av att vara i grupp med en vän för att känna sig trygg. Detta är något som Klang & et al (2020) nämnde ovan i kapitlet *6.Tidigare forskning*; att elever med särskilda behov trivs bättre i en grupp med sina vänner (För att se hur grupperna ser ut se kapitel: *8. Resultat*).

Sammanfattningsvis deltar två klasser i undersökningen där det totalt konstrueras fyra grupper med tre till fyra elever i varje grupp. Grupperna kommer vara heterogena med tanke på genus, kunskapsnivå, erfarenheter, funktionsvariationer samt bakgrund. Under följande rubrik skrivs det om vilka uppgifter som används i undersökningen.

7.2.2 Urval av uppgifterna

I första hand var det känt att arbetet skulle utgå från problemlösningsuppgifter. För att vara objektiv och inte påverka studien, utgår undersökningen från momentet läraren undervisar om vid tidpunkten som undersökningen utförs. Enligt Svensson (2015, s.216) bör observatören försöka vara objektiv och inte påverka studien. För den anledningen valdes det att utgå från momentet läraren undervisar om. Läraren för klasserna kontaktades som berättade att cirkelns area var den aktuella delen av matematik som undervisas i klassrummet för eleverna. Förutom att undersökaren bör vara objektiv med vilket moment eleverna arbetar med är det även viktigt att vara objektiv i valet av uppgifter. Därför valdes det ut uppgifter från läroboken som eleverna använder.

Urvalet av uppgifterna som valdes är anknutna till vardagssituationer, för att eleverna ska kunna anknyta användningen av cirkelns area till sitt vardagliga liv (jfr Skolverket 2017, s.6). Första två uppgifterna är valda från elevernas lärobok som heter *6A Koll på matematik* av Björklund & Dalsmyr (2016). Läraren kontaktades för att berätta om vilka uppgifter som valts ut till denna forskning. Anledningen till att läraren kontaktades är för att eleverna inte ska lösa uppgifterna innan studiens genomförande. Problemlösningsuppgifter är sådana som eleverna inte har bemött tidigare (Skolverket 2017, s.7). Därför är det viktigt att eleverna inte löser uppgifterna som är valda innan undersökningens utförande.

För att kunna säkerställa att eleverna skriver ner sina lösningar på pappret har det skrivits till i slutet av alla tre uppgifter: ”Skriv ner din lösning”. I denna del beskrivs vilka uppgifter som kommer att användas och varför (För att se färdiga uppgiftsformuläret, se Bilaga 1).

Första problemlösningsuppgiften ser ut på följande vis: “**79** Helikopterlandningsplattan har diametern 34,7 m. Hur stor är arean på plattan? Avrunda till en decimal.” (Björklund & Dalsmyr 2016, s.56). För att öppna upp uppgiften för fler möjliga strategival kommer det att läggas in en bild på en helikopterplatta. I boken förekommer det en bild på en helikopterplatta men det är inte möjligt att mäta eller rita på plattan eftersom den är skymd, därför konstrueras det en egen bild. Dock var det inte möjligt att göra en lika stor som diametern visar, men det är självaste illustrationen som är centralt för att den ska öppna upp ett alternativ för eleverna till att kunna använda illustration som strategi.

Andra uppgiften liknar först uppgiften, men denna gång kommer det vara utan någon bild. För att se ifall eleverna använder strategin illustration fortfarande eller inte. Uppgift 2: "**77** En studsmatta har diametern 3,8 m. Hur stor är arean? Avrunda svaret till två decimaler." (Björklund & Dalsmyr 2016, s.56).

På grund av begränsade antal problemlösningsuppgifter i boken konstrueras det en liknande uppgift som de ovannämnda[5]. Uppgift 3: En rund spegel har diametern 22 cm. Hur stor är arean? Avrunda till heltal. Skriv ner din lösning.

Dessa är problemlösningsuppgifterna som kommer att användas i undersökningen. Anledningen till att det används tre uppgifter, är för att resultatet blir för svagt om eleverna får diskutera enbart en gång. Tre uppgifter medför att eleverna hinner diskutera sina lösningar vid två tillfällen innan sista uppgiften, vilket är tillräckligt eftersom alla tre uppgifter kan lösas med liknande strategi.

7.3 Etiska principer

När ett vetenskapligt arbete utförs bör det tas hänsyn till de forskningsetiska kraven. För att en undersökning ska bli etiskt korrekt ska den förhålla sig till de fyra forskningsetiska principerna. De fyra etiska principerna är samtyckeskravet, informationskravet, konfidentialitetskravet och nyttjandekravet (Vetenskapsrådet 2017).
Informationsprincipen handlar om att informera deltagarna om studien (Vetenskapsrådet 2017). Detta har följts genom att läraren fick berätta om studien för eleverna en vecka innan undersökningen. Innan studien utfördes berättade jag även muntligt för hela klasserna vad studiens syfte är, vart studien publiceras, hur deras integritet skyddas samt hur studien genomförs. På det viset berättas det om konfidentialitetskravet och nyttjandekravet för eleverna. Konfidentialitetskravet handlar om att skydda elevernas identitet (Vetenskapsrådet 2017), vilket uppföljs genom att inte nämna vilken skola eleverna går i och det skrivs inga riktiga namn på deltagarna. Nyttjandekravet handlar om att den information som samlas in används endast för forskning (Vetenskapsrådet 2017), detta berättades för eleverna muntligt. Samtyckeskravet handlar om att samtycka deltagandet i undersökningen (Vetenskapsrådet 2017). För att samtyckeskravet ska uppfyllas delades det ut samtyckesblanketter till elevernas

[5] Uppgiften är således inspirerad av uppgifterna i Björklund & Dalsmyr (2016, s.56).

vårdnadshavare en vecka innan observationen. I samtyckesblanketten får vårdnadshavare information om det som kommer att undersökas, på vilket sätt undersökningen genomförs, att studien kommer att spelas in i min telefon, hur elevernas integritet kommer att skyddas samt hur undersökningen kommer att dokumenteras och användas. Elever får inte delta i studien utan deras vårdnadshavares samtyckande (Se bilaga 2 för att läsa samtyckesblanketten).

7.4 Analysverktyg

För att besvara frågeställningarna struktureras det ett observationsschema. Syftet med schemat är att snabbt kunna registrera elevernas användning av strategier och heterogena gruppernas funktion (jfr Bryman 2018, s.340). Ett observationsschema bör vara enkelt att använda (Bryman 2018, s.342). Därför utformas ett observationsschema som enkelt går att fylla i, samtidigt som observationen genomförs. Nedan finns de två observationsscheman som kommer att användas för studien.

7.4.1 Observationsschema 1

För att besvara frågeställningen om vilka strategier elever använder och ifall de utvecklar deras användning av strategier används *Observationsschema 1*. Detta schema kommer att fyllas i genom att skriva streck för varje strategi eleverna väljer att använda, vid varje uppgift de löser. Alla strategier som står med i observationsschemat har beskrivits i kapitlet *5. Teorianknytning* (Det som inte är fet-markerat ingår i Multiplikationsstrategin). Dock skrivs inte hur likhetstecknet användes av eleverna i observationsschemat. För att veta hur eleverna använde likhetstecknet behöver jag se elevernas skriftliga beräkning på pappret. Därför kommer detta presenteras i resultatet men inte i observationsschemat.

Tabell 1. Observationsschema 1

Strategier för cirkelns area	***Uppgift 1***	***Uppgift 2***	***Uppgift 3***
Multiplikation			
- Huvudräkning			
- Kalkyl			
- $r^2 \rightarrow faktor * \pi$			
- $A = \pi * r^2$			

Avrunda decimaler	
Upprepad addition	
Räkna rutor	
Irrelevanta strategier	
Övriga strategier	
Totalt	

7.4.2 Observationsschema 2

Detta observationsschema är till för att observera hur heterogena grupper fungerar och ifall det uppmärksammas några klassrumsnormer. Detta observationsschema är till för att sammanfatta det som sker i grupperna för att få en översiktlig bild på hur klassrumsnormerna och heterogeniteten fungerade i grupperna. Observationsschemat fylls i genom att skriva: ”Fungerar ej”, ”fungerar delvis” och ”fungerar bra”. Alla kategorier som står med i observationsschemat har beskrivits i kapitlet *5. Teorianknytning*.

Tabell 2. Observationsschema 2

Heterogenitet	***Grupp 1***	***Grupp 2***	***Grupp 3***	***Grupp 4***
klassrumsnormer				
Heterogena gruppens funktion				
Utbyte av strategier				

Förutom observationsscheman som struktureras, spelades alla fyra gruppsamtal in. Inspelningen utfördes via min telefon. Anledningen till att inspelningen utförs, är för att kunna dokumentera hur eleverna diskuterar i heterogena grupper, hur inkluderingen kommer att se ut samt för att uppmärksamma samtalet om strategier. Samtidigt är det intressant att ta del av deras tankegångar kring hur de resonerar över sitt strategival; det vill säga hur eleverna tänker samt varför de räknade på det viset. Sådana perspektiv går inte att ta del av även om eleverna skriver ner sina tankar steg-för-steg på pappret. Pappret är dock även viktigt för att kunna visuellt kunna se deras beräkning. Elevernas papper som de löser uppgifterna på kommer att sparas och eventuellt presenteras i resultatet för att konkret visa deras användning av strategier. I nästa del beskrivs hur observationen genomfördes.

7.5 Genomförande

Notera att denna del skrivs efter att undersökningen har genomförts. En vecka innan observationens utförande, skickades det ut samtyckesblanketter till elevernas vårdnadshavare med information om studien. Dagen av observationen planerade jag och läraren uppsättningen av de heterogena grupperna, där eleverna som har fått samtycke av sina vårdnadshavare fick delta. När grupperna var konstruerade informerades eleverna muntligt om studiens syfte, genomförande, observationens nyttjande, hur studien kommer att dokumenteras samt hur deras integritet kommer att skyddas.

Efter att eleverna fick informationen kallades en grupp i taget in till grupprummet som den strukturerade observationen och den kompletterande gruppintervjun utfördes i. På bordet fanns det framför varje elev: uppgifter, penna, suddgummi, miniräknare samt ett papper som är till för att underteckna deras lösningar på. Observationen inleds med att eleverna fick informationen om att de ska lösa en uppgift i taget. Eleverna fick veta att de ska skriva ner sina lösningar på pappret framför dem för att undersökningen ska kunna dokumenteras. Eleverna fick även information om att när de blir klara ska de diskuterar deras användning av strategier. Eleverna fick dessutom informationen om att svaret inte är det viktiga, utan att deras lösningsmetod är det viktiga. Efter informationen fick eleverna lösa första problemlösningsuppgiften. Eleverna fick i första hand lösa uppgiften enskilt. Eftersom det är elevernas individuella användning av strategier och deras individuella utveckling av strategier som undersöks. Kilborn & Karlsson (2015a, s.32) föreslår i sin bok *Problemlösning och matematisk modellering* att lärare bör ge eleverna ett tillfälle att reflektera över uppgiften enskilt. Författarna påpekar att individers reflektion i förhand är viktig för att de ska senare ha något att diskutera om, annars finns det en risk att eleverna exkluderas från samtalet. Barton (1997, s.234) skriver att heterogena gruppers funktion är meningslös om inte alla elever deltar i samtalet. Vilket indikerar att elever bör få möjligheten till att reflektera, på det viset kan heterogena gruppsamtalens funktion bli meningsfullt.

När eleverna löste klart uppgiften individuellt, diskuterade eleverna vilken strategi de valde att använda och varför. Efter gruppsamtalet fick eleverna beräkna uppgift två enskilt och därefter diskutera deras användning av strategi (igen). Här var det intressant att se ifall eleverna inkluderade andra elevers strategier till sin egen strategianvändning.

När observationen var färdig, utfördes det en kompletterande gruppintervju för att få svar på saker som eleverna inte tog upp. Exempel på frågor som ställdes i gruppintervjun var frågor om deras användning av strategier, vart de har lärt sig att använda den strategin, klassrumsnormer och heterogenitet. Frågorna som ställdes handlade om elevernas tankar bakom deras tillämpning av strategier och arbetssättets funktion. Ahrne & Svensson (2015, s.19) skriver att en bra forskare ska sträva efter att minimera sin medverkan i forskningsprocessen. För att vara så objektiv som möjligt, deltog jag inte i studien och hade därför ingen påverkan på processen vid observationen. För att observationen inte skulle inkludera någon medverkan av mig, utfördes det en kompletterande gruppintervju där jag kunde ställa frågor som är nödvändiga för att resultatet ska kunna vara komplett. Ingen specifik tidsram för studien hade bestämts i och med att det var viktigt att eleverna skulle kunna ta den tiden de behöver. Det tog ungefär 30 minuter för varje grupp att lösa uppgifterna och diskutera.

7.6 Sammanfattning

Metoden för denna studie är utformad kvalitativt där det utfördes fyra strukturerade observationer över elevers individuella användning av strategier och dess strategiutveckling under gruppsamtalet. Det utfördes dessutom en kort kompletterande gruppintervju för att få mer information om bland annat elevernas resonemang kring deras strategival. I detta kapitel skrevs det om vilket metodval som användes, urval som utförts, datainsamlingsmetoden, etiska principerna, uppgifterna som eleverna beräknade samt analysmodellen.

8. Resultat

I kapitel *5. Teorianknytning* har det beskrivits vilka strategier som finns för att beräkna cirkelns area och i avsnitt *7.5 Genomförande* har det beskrivits hur studien genomfördes. I avsnitt *7.4 Analysverktyg* framfördes två observationsscheman som användes under observationen. I detta kapitel framförs resultatet av strukturerade observationerna och kompletterande gruppintervjuerna. Resultatet förhålls till studiens syfte och frågeställningar. I resultatet kommer det att skrivas om vilka strategier eleverna använde, om strategibytet och hur de heterogena grupperna fungerade. Det som ingår i detta kapitel är: ifyllda Observationsscheman, sammanfattande tabeller om vilka strategier eleverna använde i varje grupp, elevernas användning av likhetstecknet, hur heterogena grupperna fungerade samt relevanta delarna av datainsamlingen (inspelningen och elevers lösningar på papper).

8.1 Resultat. Elevers strategier

Frågeställning 1 handlar om att undersöka vilka strategier elever använder vid hanteringen av problemlösningsuppgifter om cirkelns area. Detta kapitel inleds med en sammanställning av observationsscheman ifylla, där gruppernas strategianvändning och strategiutveckling framställs. Beräkningsfel bland decimaler eller enstaka talfel är inte relevant för denna studie. Små beräkningsfel inkluderas således inte i observationsschemat då det viktigaste är strategierna som eleverna använder.

Tabell 3. Observationsschema 1 ifylld

Strategier för cirkelns area	***Uppgift 1***	***Uppgift 2***	***Uppgift 3***
Multiplikation	9	12	13
- *Skriftlig huvudräkning*	4	4	2
- *Kalkyl*	5	8	11
- r $^2 \longrightarrow$ *faktor* $* \pi$	4	6	6
- $r^2 * \pi$	5	6	7
- *Avrundade decimaler*	7 av 9 elever	9 av 12 elever	12 av 13 elever
Upprepad addition	0	0	0
Räkna rutor	0	0	0
Irrelevanta strategier	5	2	1
Inget svar framfördes	1	1	1
Övriga strategier	0	0	0
Totalt	15 Elever	15 Elever	15 Elever

Tabell 3 synliggör att det inte finns en stor variation av vilka strategier som eleverna använde. Majoriteten av eleverna använde sig av multiplikationsstrategin med variation på val av algoritmer och uppdelningen av multiplikationen. De elever som valde att arbeta med skriftlig huvudräkning var färre än dem som använde sig av kalkylen. Det fanns även två elever som valde att byta till att beräkna med kalkyl vid sista uppgiften när de uppmärksammade att andra elever i gruppen valde att använda kalkylen. Alla elever som räknade med skriftlig huvudräkning räknade endast divisionen av diametern med skriftlig huvudräkning sedan fortsatte dem med kalkylen. Förutom multiplikation använde få elever irrelevanta strategier, men vi kan se att vid uppgift 1 använde sig fem elever av irrelevanta strategier och vid sista uppgiften återstod endast en elev. Det fanns således fyra elever som utvecklade sin individuella strategianvändning och började använda en lämplig metod för att beräkna cirkelns area så småningom. Vid nästkommande avsnitt beskrivs resultatet för varje enskild grupp för att kunna se elevernas individuella strategiutveckling.

8.1.1 Grupp 1

För att skydda deltagarnas identitet kallas eleverna i grupp 1 för: A, B, C och D. Nedan presenteras resultatet för vilken strategi som eleverna använde. Eleverna har skrivits in som bokstäver istället för nummer för att det ska vara enklare att se elevernas individuella utveckling (Vid det generella resultatet i Tabell 3 skrivs resultatet in med tal). Kolumnerna med strategierna som inte användes togs bort från gruppernas resultat (Det står däremot med i Tabell 3). Detta är resultatet från första gruppens strategianvändning:

Tabell 4. Grupp 1

Strategier	***Uppgift 1***	***Uppgift 2***	***Uppgift 3***
Multiplikation	B, C	A, B, C	A, B, C, D
- *Skriftlig huvudräkning*	B, C	B, C	0
- *Kalkyl*	0	A	A, B, C, D
- $r^2 \longrightarrow$ *faktor* $* \pi$	0	0	0
- $r^2 * \pi$	B, C	A, B, C	A, B, C, D
Avrundade decimaler	B, C	A, B, C	A, B, C, D
Irrelevanta strategier	A, D	D	0
Totalt	A, B, C, D	A, B, C, D	A, B, C, D

Tabell 4 visar att eleverna i grupp 1 utvecklade sin användning av strategier efter att de diskuterade i grupp. Det började med att endast två elever använde relevant beräkningsstrategi för att mäta cirkelns area, till att alla elever i gruppen använde multiplikationsstrategin.

När det gäller irrelevanta strategier, använde sig Elev A av en irrelevant strategi. Elev A multiplicerade diametern med pi. När elev B berättade om sin lösningsstrategi, förstod Elev A att strategin är irrelevant och sa: “jag blandade ihop det med omkrets”. Elev A ändrade därefter sin strategi vid uppgift 2 och 3 till multiplikationsstrategin.

Elev D hade dividerat diametern med två och sedan multiplicerat radien med två vid uppgift 1 och två. Elev D började således använda multiplikationsstrategin men uppfattade potenser felaktigt, vilket medförde att resultatet blev irrelevant.

Elev B och C använde samma strategi under hela processen och fick med de andra två kamraterna (A och D) som började använda samma strategi efter gruppsamtalet. Något som är intressant i denna grupp är att elev B och C beräknade divisionen av diametern med skriftlig huvudräkning. Vid tredje uppgiften ändrade både elev B och C till att använda kalkylen istället för huvudräkning när de uppmärksammade att de andra deltagarna gjorde det. Detta tyder på att elever som använder relevanta strategier kan ändra på deras beräkning.

Vid den kompletterande gruppintervjun frågade jag gruppen om varför de räknade ut cirkelns area på detta vis: $A = \pi * r^2$. Jag fick inget svar; eleverna var tysta. Jag frågade därför mer specifikt “varför dividerar ni diametern på två?”. Då svarade Elev A: “För att radien är halva diametern”. Eleverna i gruppen visste alltså inte varför de beräknar med multiplikationsstrategin.

8.1.2 Grupp 2

Som det beskrevs ovan, hade grupp 1 utbyte av lösningsstrategier. I grupp 2 fanns det inte lika mycket utbyte som det visas i Tabell 5. Deltagarna i grupp 2 kallas för: E, F och G för att deras identitet ska skyddas. Det fanns således tre deltagare i denna grupp till skillnad från de andra grupperna. Men Elev G valde att inte skriva någon lösning och deltog inte i gruppsamtalet. Det var alltså endast två deltagande elever i denna grupp.

Tabell 5. Grupp 2

Strategier	***Uppgift 1***	***Uppgift 2***	***Uppgift 3***
Multiplikation	E, F	E, F	E, F
- Skriftlig huvudräkning	0	0	0
- Kalkyl	E, F	E, F	E, F
- r ^{2}→ *faktor** π	0	0	0
- r ^{2}* π	E, F	E, F	E, F
Avrundade decimaler	0	0	E
Inget svar	G	G	G
Totalt	E, F, G	E, F, G	E, F, G

Elev E och F tillämpade samma strategi, vilket är multiplikationsstrategin där båda använde kalkyl som algoritm. Det uppstod några beräkningsfel när dessa elever kalkylerade. Till exempel hade Elev F skrivit på sitt papper att radien är *18,5* istället för *17,35* vid första uppgiften. Detta beror på att det blev fel med kalkylen när Elev F dividerade diametern på två. Ett annat exempel är att Elev E hade skrivit på sitt papper att Pi är *3,4* istället för *3,14* i miniräknaren och fått fel svar, men Elev E använde multiplikationsstrategin vid beräkningen. Detta skulle kunna tyda på att elever kan ha relevanta strategier och skriver ner hur de tänker men att det blir några felaktiga svar vid beräkningen med kalkyl.

När eleverna löste klart uppgift tre diskuterade dem att avrunda decimaler. Eleverna hade inte avrundat till decimaler vid uppgift ett och två som det stod i instruktionerna, men vid uppgift tre uppmärksammade Elev E att det stod “avrunda till heltal” i uppgiftens instruktioner. Därför avrundade Elev E svaret *379,94 cm* till *380 cm*. När Elev E uppmärksammade att Elev F inte avrundade decimalerna till heltal, försökte Elev F förklara för Elev E vad avrunda innebär genom att säga: “Avrunda är när man ändrar sista numret så det inte blir för många nummer. Som nu du tar 9, 94 och ändrar det till närmaste numret därför blir det 80.”. Elev F berättade att ordet avrunda känns inte igen och att Elev F inte har hört ordet förr. Elev E försökte inte förklara på ett annat sätt och svarade Elev F med ett: “jaha”.

Vid den kompletterande gruppintervjun frågade jag Elev F hur eleven skulle föredra att lära sig om att avrunda decimaler; Elev F berättade: “Jag behöver se för att förstå.”. Elev E fick därför visa för Elev F hur man avrundar. Då visade Elev E att ifall decimalerna är högre än 0,50 avrundas det till talet som är större och ifall talet är lägre än 0,50 avrundas det till talet som är lägre. Då berättade Elev F: “jaha ok då vet jag, jag har då lärt mig något nytt idag”.

8.1.3 Grupp 3

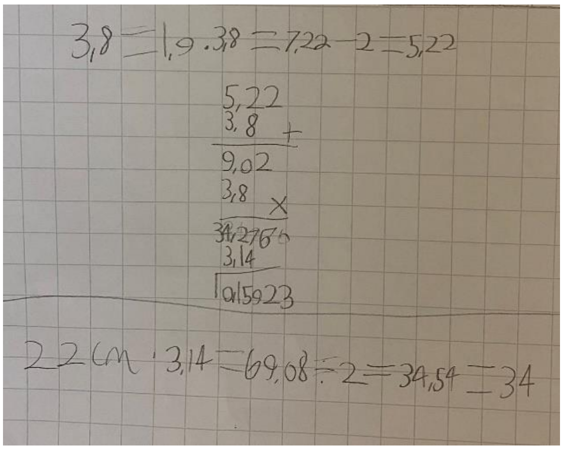
I grupp 3 kallas eleverna för: H, I, J och K för att deras identitet ska skyddas. Nedan kan du se resultatet över vilka strategier eleverna använde i grupp 3.

Tabell 6. Grupp 3

Strategier	***Uppgift 1***	***Uppgift 2***	***Uppgift 3***
Multiplikation	H, I, K	H, I, K	H, I, K
- *Skriftlig huvudräkning*	I, K	I, K	I, K
- *Kalkyl*	H	H	H
- $r^2 \longrightarrow$ *faktor* $* \pi$	H, I, K	H, I, K	H, I, K
- $A = \pi * r^2$	0	0	0
Avrundade decimaler	H, I, K	H, I, K	H, I, K
Irrelevanta strategier	J	J	J
Totalt	H, I, J, K	H, I, J, K	H, I, J, K

I Tabell 6 kan vi se att eleverna H, I och K använde samma strategi på alla tre uppgifter. De påverkades således inte av andra elevers användning av strategier. De ändrade dessutom inte på algoritmen som de använde på alla tre uppgifterna, där elev I och K använde algoritmen skriftlig huvudräkning vid divisionen av diametern. Elev H använde kalkylen som verktyg och påverkade inte andra elevers (elev I och K) användning av algoritm.

Elev J använde en irrelevant strategi vid alla tre uppgifter. Övriga gruppdeltagarna förklarade hur de löste uppgifterna vid gruppsamtalen. Det inspirerade Elev J som började att använda strategin vid uppgift tre. Eleven tog således lite inspiration av andra elevernas strategianvändning. Elev Js strategi var fortfarande irrelevant men den utvecklades till att hamna på rätt spår. Detta är hur Elev J beräknade:



Figur 1. Elevsvar J

Figur 1 visar hur Elev J i grupp 3 löste uppgift två och tre. Enligt figuren har eleven redovisat sin lösning på uppgift två och tre med olika strategier. Uppställningen i lösningen för uppgift två är svårt att tyda.

I alla uppgifter har elev J använde likhetstecknet felaktigt. Eleven J använder likhetstecknet felaktigt genom att eleven multiplicerade och dividerade tal vid båda sidorna av tecknet som inte motsvarade varandra. Ett exempel är när elev J skriver i uppgift två: “3,8=1,9*3,8=7,22–2=5,22”. Vi kan på detta vis se att eleven skriver att 3,8 det samma som 5,22, vilket är olika tal.

I lösningen för uppgift tre kan vi se att Elev J multiplicerade diametern med Pi. Sedan dividerade Elev J faktorn på två. Det var ett steg i en riktning som andra eleverna (Elev H, I och K) hade tagit men eleven kom inte till att använda multiplikationsstrategin. Elev J skulle troligtvis använt multiplikationsstrategin ifall det fanns en fjärde uppgift.

När eleverna diskuterade deras lösningsstrategier i grupp, beskrev Elev J sin tanke bakom strategin: “Jag vet inte varför jag gjorde så. Jag tänkte bara, det blev många nummer märker jag när ni berättar hur ni löste”. Detta besvarade inte varför eleven använde den strategin och inte multiplikationsstrategin. Därför frågade jag i den kompletterande gruppintervjun Elev J:

“Varför använde du en annorlunda strategi än den dina klasskamrater använde”. Elev J svarade: “Jag ville hitta en annan strategi att kunna få rätt svar på”.

8.1.4 Grupp 4

I grupp 4 kallas eleverna för: L, M, N och O för att deras integritet ska skyddas. Nedan i Tabell 7 visas resultatet över vilka strategier eleverna använde i grupp 4.

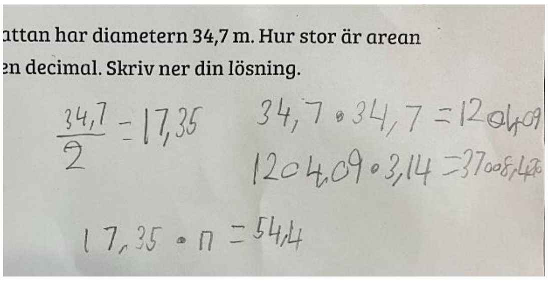
Tabell 7. Grupp 4

Strategier	***Uppgift 1***	***Uppgift 2***	***Uppgift 3***
Multiplikation	N, O	L, M, N, O	L, M, N, O
- Skriftlig huvudräkning	0	0	0
- Kalkyl	N, O	L, M, N, O	L, M, N, O
- $r^2 \rightarrow$ *faktor** π	O	L, M, O	L, M, O
- $A = \pi * r^2$	N	N	N
Avrundade decimaler	N, O	M, N, O	L, M, N, O
Irrelevanta strategier	L, M	0	0
Totalt	L, M, N, O	L, M, N, O	L, M, N, O

Resultatet från grupp 4 påminner delvist om resultatet från grupp 1. Det började med att två elever använde sig av multiplikationsstrategin till att alla fyra elever använde den strategin. Anledningen till att Elev L och M började använda multiplikationsstrategin efter första gruppsamtalet, är för att elev O och N förklarade för de andra två eleverna hur man räknar med multiplikationsstrategin för att ta reda på cirkelns area. Eleverna L och M ändrade därför sin strategi vid följande uppgifter till multiplikationsstrategin.

Anledningen till att strategin Elev M använde blev irrelevant är för att eleven multiplicerade radien en gång istället för två gånger. När Elev M berättade om sin lösning för uppgift 1, började elev O skratta och sa: “Du skulle gångra bättre *17,35*17,35* och sen gångrar du pi”. Då höll elev M med och mindes att det är på det viset läraren har lärt dem att räkna ut cirkelns area.

Efter att de andra tre eleverna berättade om sin lösning för uppgift 1, berättade Elev L: “Jag har också räknat fel”. Där elev O och N började skratta och elev O kommenterade: “Nej jag är inte ens surprised, jag förväntade mig att du skulle göra fel”.



Figur 2: Elevsvar L

I figur två kan vi se lösningen av Elev L på uppgift 1. Elev L har skrivit ungefär likadant som elev M. Men skillnaden var att Elev M hade multiplicerat diametern med sig självt och sedan med pi. Det kan ha varit att elev L imiterade det Elev M skrev. En till skillnad mellan Elev L och M strategi vid första uppgiften, är att elev L inte avrundade decimalerna medan Elev M avrundade decimalerna.

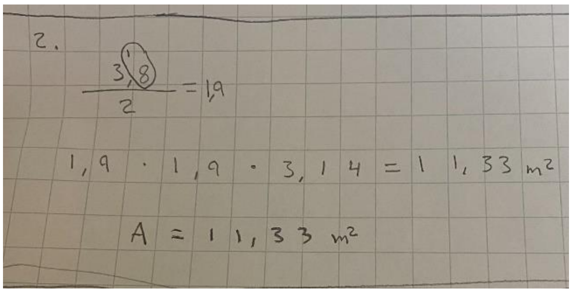
Förutom strategianvändningen som vi kan se i Figur 2, kan vi se att Elev L har uppfattat innebörden av likhetstecknet och skrivit tal som motsvarar varandra vid båda sidorna av likhetstecknet.

I den kompletterande gruppintervjun frågade jag: “Varför räknar ni ut cirkelns area med $\pi * r^2$?” Där elev O svarade: “För att det är så man ska göra”. Då ställde jag följdfrågan “vart har ni lärt er att använda denna strategi?”. Där berättade elev L: “I mitt klassrum av läraren”. Elev N började skratta och sa: “så du säger att läraren har lärt dig fel eller? du satt säkert och sov på lektionen”. (Lärarens namn ersattes med läraren i detta citat för att skydda integriteten). Senare ställde jag en till följdfråga: “Berätta för mig hur läraren förklarade om varför man använder multiplikationsstrategin när ni räknar ut cirkelns area?”. Elev N och O försökte komma ihåg hur läraren förklarade för dem. Till slut svarade Elev N och O svarade: “Vi kommer inte ihåg”.

I Tabell 7 kan det uppmärksammas att elev O delade upp sin beräkning. Där elev O beräknade multiplikationen av radien sedan multiplicerade faktorn med pi. Elev O berättade inte varför detta räknesätt användes. Därför frågade jag Elev O vid den kompletterande gruppintervjun: "Varför delar du upp beräkningen där du multiplicerade *radien*radien* och sedan multiplicera med pi?". Elev O svarade: "Det blir enklare att förstå".

8.1.5 Likhetstecken

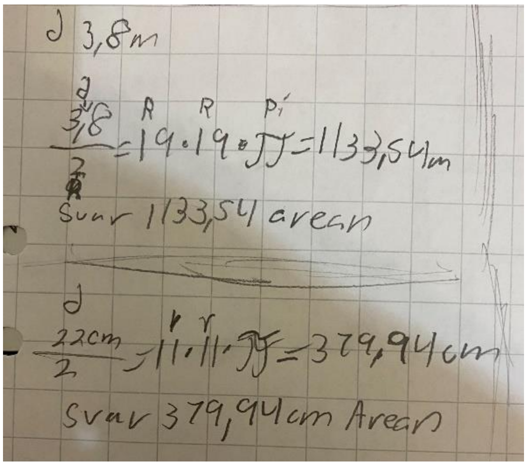
Utifrån resultatet från elevernas svar kring likhetstecknet kan det konstateras att eleverna hade till största del liknande uppfattning av likhetstecknet. Majoriteten av eleverna skrev på båda sidorna av "lika med tecknet" tal/ beräkning som motsvarar varandra. Ett exempel som motsvarar majoriteten av elevernas användning av likhetstecknet kan vi se i beräkningen av Elev B i grupp 1, som svarade på fråga 2 på detta vis:



Figur 3. Elevsvar B

I Figur 3 kan vi se att Elev B dividerade diametern, sedan skrev ner kvoten på raden under. Detta visar att båda talen om likhetstecknet motsvarar varandra, majoriteten av eleverna använde således "lika med tecknet" som Elev B.

Elev F från grupp 2 använde likhetstecknet på ett annorlunda vis. Elev F skrev sin lösning på detta vis:



Figur 4. Elevsvar F

Elev F har besvarat både fråga 1 och 2 med multiplikationsstrategin som det visas i figur 4. Eleven dividerade diametern på två för att ta reda på radiens längd. Elev F började multiplicera radien med sig självt och med pi direkt efter divisionsprocessen. Som tidigare nämnt i kapitel *5. Teorianknytning*; det som står vid båda sidorna av likhetstecknet måste motsvara varandra. Problematiken med detta svar är att *3,8/2* är inte samma sak som *11,3354 m*. Ett passande alternativ är att skriva lösningen som elev B (Figur 3) för att likhetstecknet ska användas korrekt.

8.1.6 Sammanfattning

Resultatet för elevers användning av strategier har framställts i denna del. Det visade sig att eleverna endast använde multiplikation som relevant strategi. De andra strategierna som presenterades i kapitel *5. Teorianknytning* användes således inte av eleverna. Majoriteten av eleverna som använde irrelevanta strategier bytte till multiplikationsstrategin efter första eller andra gruppsamtalet (4 av 5 elever). Något som bör uppmärksammas är att det fanns en variation av elevernas algoritmanvändning och vissa elever delade upp sina beräkningar, medan andra inte. Dessutom använde 12 elever likhetstecknet på ett korrekt sätt, medan 2 elever använde tecknet inkorrekt.

8.2 Resultat. Heterogenitet & Klassrumsnormer

Heterogenitet har varit centralt i studien och de aspekter som har undersökts beskrivs i kapitel *5. Teorianknytning*. Utifrån teorierna som framfördes, utfördes det en undersökning där eleverna var indelade i grupper som var heterogena. Efter att eleverna löste uppgifterna individuellt, diskuterade dem i heterogena grupper sin användning av strategier. Syftet med denna studie var att ta reda på ifall eleverna påverkas av andra deltagarnas strategianvändning inom samtal i heterogena grupper (FR 2). I denna del framställs resultatet som kommer att besvara frågeställning två. Eleverna delades in i heterogena grupper med fokus på faktorerna; elevers kunskapsnivå, bakgrunder, funktionsvariationer och kön. För att se hur grupperna genomfördes läs delen *Urval av grupp*. Som det redovisades i avsnitt *7.4 Analysverktyg*, används observationsschema 2 i strukturerade observationen för att sammanfatta hur: klasrumsnormerna, heterogenitetens funktion och utbytet fungerade. I tabellen nedan kan du se Observationsschema 2 ifylld.

Tabell 8. Observationsschema 2 ifylld

Heterogenitet	***Grupp 1***	***Grupp 2***	***Grupp 3***	***Grupp 4***
Klassrumsnormer	Det fanns	Det fanns	Det fanns	Det fanns
Heterogena gruppens funktion	Fungerade bra	Fungerade delvis	Fungerade bra	Fungerade delvis
Utbyte av strategier	Det fanns utbyte	Inget utbyte	Delvis utbyte	Det fanns utbyte

Som det visar sig i Tabell 8, var det varierande resultat mellan grupperna. I kolumnen om Heterogenitetens funktion handlar det om hur inkluderingen i klassrummet gick till, som exempelvis ifall eleverna kände sig trygga i gruppen. Kolumnen om Klassrumsnormer handlar om det fanns tydliga normer eller ifall det saknades. Sista kolumnen handlar det om det fanns något strategiutbyte mellan eleverna i heterogena grupper. Som vi kan se var det skiftande resultat inom grupperna. I alla grupper fanns det tydliga tecken på klassrumsnormer genom att eleverna använde enbart multiplikationsstrategin eller irrelevant strategi. Mer om klassrumsnormer beskrivs i analysen av resultatet. Resultatet av hur heterogenitet och om utbytet av strategier fungerade för varje grupp presenteras längre ner.

8.2.1 Heterogenitet & utbyte i Grupp 1

I grupp 1 fanns det olika kön, kunskapsnivåer och bakgrunder. Det uppkom skiftande tankar, där Elev A och D använde irrelevant strategi vid första uppgiften och elev B och C använde multiplikationsstrategin. Det som var anmärkningsvärt i denna grupp var att Elev A förstod på egen hand att metoden för att räkna ut cirkelns area och omkrets hade blandats ihop. Men när Elev D berättade i samtalet om sin lösning, berättade Elev D: “Jag har gjort samma sak som er.”, utan att lägga till någon annan kommentar. Det antogs att Elev D verkligen menade det tills resultatet sammanställdes. Elev D hade skrivit på sitt papper multiplikationen; $r * \pi$, problematiken med detta är att eleven multiplicerade radien enbart en gång. Detta kan bero på att eleven inte känner sig trygg nog i den heterogena gruppen för att berätta om sin strategi. Vid tredje uppgiften började eleven dock använda multiplikationsstrategin som övriga gruppmedlemmarna.

Alla elever var delaktiga i denna grupp. Deltagarna diskuterade men de var lite blyga och uttryckte sig ganska kort. Det fanns inga djupa samtal eller utbyten av kunskap. Elev A och D upptäckte på egen hand att deras strategi var irrelevant för att mäta cirkelns area, efter gruppsamtalet.

8.2.2 Heterogenitet & utbyte i Grupp 2

I grupp 2 har Elev F diagnosen dyslexi (läs- och skrivsvårigheter) och frågade ifall läs-hjälp var möjligt. Självklart läste jag uppgifterna högt. Grupp 2 var delvist annorlunda eftersom det fanns tre deltagare, men elev G valde att inte delta i aktiviteten. Elev G har en utvecklingsstörning, vilket möjligtvis kan vara anledningen till att Elev G inte deltog i aktiviteten. Därför förblev det endast två elever som diskuterade. Eleverna hade samma lösningsstrategier, därför förblev gruppsamtalet väldigt kort. Efter att eleverna löste uppgifterna individuellt, berättade eleverna endast för varandra hur de löste uppgiften. Elev F sa: “mmm vi har löst på samma sätt då”. Då var Elev F och E redo att lösa nästa uppgift. I denna grupp var deltagarna av samma kön. Däremot har eleverna: olika bakgrunder, kunskapsnivåer och funktionsvariation och det fungerade lagom bra där Elev F och E diskuterade och utbytte kunskaper om att avrunda decimaler.

8.2.3 Heterogenitet & utbyte i Grupp 3

I grupp 3 fanns det olika kunskapsnivåer och funktionsvariationer. Eleverna hade samma kön och samma bakgrund. I grupp 3 har elev H diagnosen autism och fick vara med en vän i gruppen för att känna sig bekväm att delta i gruppsamtalet och det fungerade; eleven kände sig bekväm. I denna grupp flöt samtalet på där eleverna berättade vilken strategi de använde. Fokus i gruppsamtalet var på lösningen av Elev J i denna grupp. Eleverna H, I och K försökte hjälpa Elev J genom att förklara hur beräkningen med multiplikationsstrategin går till. Förklaringen fick elev J att börja rikta sig mot att använda multiplikationsstrategin. Vi kan se i figur 1 hur Elev Js svar utvecklades efter varje uppgift.

8.2.4 Heterogenitet & utbyte i Grupp 4

Eleverna hade i denna grupp utbyte av strategier som har benämnts under rubriken *8.1.4 Grupp 4*. I denna grupp fanns det elever med olika kunskapsnivåer, bakgrunder, kön och funktionsvariationer. Funktionsvariationerna som fanns i denna grupp var ADHD och Dyslexi men det påverkade inte undersökningen på något vis. När det gäller kunskapsnivån hade elev N och O högre kunskapsnivå och det var dem som talade majoriteten av tiden. Efter att eleverna löste uppgift 1 berättade de om deras lösningsstrategier. När elev L och M berättade om hur de löste uppgift 1 började Elev O skratta. Sedan började de förklara för Elev L och M hur man räknar med multiplikationsstrategin. Det som uppstod i denna grupp var således att eleverna hjälpte varandra till att lära sig om multiplikationsstrategin. Detta fick Elev L och M att ändra sin strategi till multiplikationsstrategin. Det var dock ingen god miljö i denna grupp där Elev O och N var nedlåtande mot Elev L och M.

8.2.5 Sammanfattning

I denna del framställdes resultatet av hur heterogeniteten och klassrumsnormerna var i observationen. I grupp 1, 3 och 4 fanns det utbyte mellan eleverna, men i grupp 2 var det endast två elever som var delaktiga och båda eleverna hade samma tankar. I följande kapitel analyseras resultatet som har framställts i detta kapitel.

9. Analys

Det som visade sig i resultatet var att majoriteten av eleverna använde sig av multiplikation som strategi. Inom multiplikationsstrategin fanns det olika metoder eleverna arbetade med. Bland annat använde eleverna olika algoritmer samt att vissa delade upp multiplikationsberäkningen. Dessutom visade det sig att eleverna som använde irrelevanta strategier utvecklades genom att de stegvist började använda multiplikationsstrategin. Detta synliggör att eleverna utvecklar sina strategianvändning i heterogena grupper. Dock var det inte enbart strategianvändningen som utvecklades, vi kunde exempelvis se hur Elev E lärde Elev F i grupp 2 om att avrunda decimaler. Detta synliggör att Forslund Frykedal (2008), DiME (2007) och Fohlin (2000) teorier om att heterogena grupper leder till utveckling stämmer, men att klassrumsnormerna begränsar användningen av strategier. Cobb & Yackel (1996) skrev att det är lärarens matematiska värderingar, övertygelser samt förståelse som påverkar hur han/hon undervisar om matematik. Dessa normer stämmer överens med resultatet, då eleverna använde endas en strategi. Det var den strategin läraren undervisade dem om att använda i undervisningen om hur beräkningen av cirkelns area går till.

Heterogena grupperna fick eleverna således att utvecklas. Resultatet visade dock att det fanns en del elever som inte kände sig tillräckligt trygga att berätta för gruppen när de räknade på ett annorlunda vis än de andra deltagarna. Ett exempel på en sådan situation är när Elev D i grupp 1 räknade med irrelevant strategi. När Elev D diskuterade med gruppen om sin strategi nämnde Elev D inte det. Ett annat exempel är när elev G i grupp 2 valde att inte delta i studien. Cobb & Yackel (1996) skrev om att klassrumsnormerna kan både hindra eller invitera elevernas synpunkter över matematik, detta visar att elev G och D troligen upplevde att normerna i klassrummet hindrade dem från att berätta det de ville säga. I ett annat exempel kan vi se i grupp 4 när elev O och N började skratta när de uppmärksammade att elev L och M löste uppgift 1 med en irrelevant strategi. Elev O började dock hjälpa Elev L och M genom att förklara hur man mäter cirkelns area med multiplikationsstrategin. Detta kan medföra att elev L och M inte vågar berätta om deras synpunkter om matematik för andra elever i nästkommande gruppsamtal som de kommer att delta i.

Förutom klassrumsnormerna fanns det elever som behövde få särskild stöd för att kunna beräkna uppgifterna. Elev F behövde få uppgifterna höglästa för sig. Detta störde inte Elev E, men det kanske skulle stört andra elever om de var i samma grupp som elev E, de skulle möjligtvis föredra att läsa uppgiften på egenhand.

Fohlin (2000, s.185) skrev att elever som har lägre kunskapsnivå, är de som utvecklas mest i heterogena grupper. Detta stämmer överens med resultatet från denna studie. Om vi tittar på Tabell 3 kan vi se att eleverna som använde irrelevanta strategier i uppgift 1 var fem elever. Vid sista uppgiften återstod endast en elev med irrelevant strategi (Elev J) som även utvecklades. men att Elev J behövde ytterligare stöd för att lyckas lösa uppgift 3 med multiplikationsstrategin.

Jakobsson (2001) skrev att elever som har högre kunskapsnivå utvecklas också i heterogena grupper. De utvecklas genom att formulera sig på olika sätt för att kunna förklara för elever med lägre kunskapsnivå hur man löser problemuppgiften. Detta var synligt bland annat när Elev E förklarade för Elev F vad ”avrunda” innebär.

Karlsson & Kilborn (2015a, s.86) skrev att vissa elever räknar med skriftlig huvudräkning. Detta kunde vi se i Figur 3 som visar Elevlösning B i grupp 1. Karlsson & Kilborn (2015a, s.72) skrev att miniräknare är betydligt enklare att använda, därför föredrar elever att använda det. Vid sammanställningen i Tabell 3 kan vi se att majoriteten av eleverna använde kalkylen när de dividerade diametern på två.

Elevernas uppfattning av ”lika med tecknet” var korrekt av 12 elever och 2 elever hade använd likhetstecknet inkorrekt. Filloy & Sutherland (1996) skrev om vikten av att eleverna uppfattar vad ”lika med tecknet” innebär, vilket majoriteten av eleverna verkar ha, men de elever som inte har förstått innebörden av likhetstecknet bör läraren tydligt förklara tecknets innebörd för dem. Apropå att uppfatta det man gör, skriver Filloy & Sutherland (1996) och Owens & Outhred (2006, s.102) att ett stort antal elever inte vet syftet till varför de löser uppgifter med metoden de använder. Detta var synligt i resultatet för denna studie. Eleverna berättade hur de beräknade för att ta reda på cirkelns area, men de kunde inte berätta varför de gör på det viset. Eleverna saknar således förståelse för multiplikationsstrategin som de använde vid beräkningen av cirkels area.

9.1 Sammanfattning

Det finns således olika synpunkter om hur funktionen för heterogena grupper fungerar. Heterogena grupperna kan få eleverna att lära sig av varandra, med tanken på skiftande kunskapsnivåer. Det kan dock kännas otryggt för eleverna att vara i en heterogen grupp. Enligt resultat utvecklas elever i heterogena grupper när de börjar använda relevanta strategier och utvecklar andra matematiska kunskaper som att lära sig att ”Avrunda”. Dock saknar eleverna uppfattning om varför de löser på det viset som de gör.

10. Sammanfattning och Diskussion

I denna studie har det undersökts vilka strategier elever använder när de löser problemlösningsuppgifter om cirkelns area. Det undersöktes även ifall eleverna utvecklar sin användning av strategi när de diskuterar i heterogena grupper kring deras strategianvändning. För att undersöka detta utfördes fyra strukturerade observationer och kompletterande gruppintervjuer. I observationerna fick eleverna lösa tre problemlösningsuppgifter om cirkelns area. De löste en uppgift i taget och de diskuterade sina strategival efter lösningen av varje uppgift. Vid den kompletterande gruppintervjun frågades eleverna om aspekter de inte tog upp i gruppsamtalet för att frågeställningarna skulle besvaras. Det var viktigt att få svar på frågorna: Vart eleverna har lärt sig att använda strategin de valde? Samt Varför eleverna använder den strategin? Den kompletterande gruppintervjun var således till för att få svar på det som inte synliggjordes i strukturerade observationen.

Resultatet av undersökningen visade att multiplikationsstrategin var den enda relevanta strategin som användes i de fyra grupperna som undersökningen grundar sig på. Enligt tidigare studier av Huang & Witz (2013) visades det sig även att elever använde multiplikationsstrategin vid beräkningen av rektangelns-, triangelns- och parallellogrammens area. Det stämmer således överens med beräkningen för cirkelns area. Min hypotes var att eleverna skulle välja olika strategier som de skulle ha utbyte av mellan sig. Ingen av eleverna använde strategierna: upprepad addition, räkna rutor eller illustration. Detta kan bero på klassrumsnormerna som läraren har skapat i klassrummen. Där endast multiplikationsstrategin har lärts ut till eleverna och de imiterar den strategin läraren undervisar dem om. Detta är något som även Weber & et al (2010) lyfter fram.

Förutom att eleverna använde multiplikationsstrategin visade det sig att ungefär ⅓ av eleverna använde irrelevanta strategier vid första uppgiften. Vid uppgift 3 fanns det enbart 1/14 elever som använde en irrelevant strategi (Elev J i grupp 3) men att eleven var på god väg till att börja använda multiplikationsstrategin. Eleverna som valde irrelevanta strategier började använda relevanta strategier efter heterogena gruppsamtalet kring deras lösningar. Det fanns deltagare med skilda kunskapsnivåer i grupperna. När eleverna som använde irrelevanta strategier hörde i gruppsamtalet hur eleverna som använde multiplikationsstrategin beräknade arean av en cirkel, insåg eleverna på egen hand att de hade valt en irrelevant strategi. Detta skriver även Huang & Witz (2013) i sin studie. Majoriteten av eleverna i denna undersökning förstod själva att de använde irrelevanta strategier (Elev A, M, D och L) och rättade till sina misstag när de berättade om vilken strategi de använde. Medan vissa elever (Elev J delvist Elev L och F) blandade ihop olika strategier där resterande gruppdeltagarna uppmärksammade och förklarade åt dem hur man bör räkna.

Om eleverna hade placerats i homogena grupper skulle eleverna med lägre kunskapsnivå fortsatt att använda irrelevanta strategier om läraren inte angriper. Eftersom med deras begränsade kunskaper skulle eleverna uppfatta den irrelevanta strategin som relevant att använda. Förutom utbytet av strategier i heterogena grupper är svenska klassrum heterogena till en viss nivå. I klassrum finns det skilda kunskapsnivåer, bakgrunder och tankar (Weber et al 2010). För denna anledning är det viktigt att eleverna lär sig att arbeta heterogent som de även kommer att få göra som medborgare (Skolverket 2019).

Forskningen av Klang & et al (2020) beskriver att elever med funktionsvariationer känner sig tryggare i homogena grupper med deras kamrater. Detta tillämpades i undersökningen där en elev som hade funktionsvariation fick vara i grupp med en vän. Förutom funktionsvariationerna fanns det elever med skiftande kunskapsnivåer. Man kan se hur två elever i grupp 4 fick nedlåtande respons av de andra två gruppdeltagarna, när de använde en irrelevant strategi på första uppgiften. Dessa elever skulle troligen känna sig mer trygga att svara i en homogen grupp med deras vänner. På detta vis slipper eleverna det Klang & et al (2020) lyfter fram; nämligen negativa känslor och osäkerhet vid lösningen av svårare problemlösningsuppgifter. Resultatet uppvisade även att elever som är starkare i matematik tar ofta över gruppsamtalet (jfr Klang & et al, 2020) detta var tydligt i Grupp 4. Cohen & Lotan (1995) beskrev att elever med högre kunskapsnivå lär sig bättre när de är i homogena grupper för att de utvecklas mer när de kan diskutera och lyssna på eleverna med samma kunskapsnivå istället för att lära ut till elever med lägre kunskapsnivå i heterogena grupper. Syftet för matematikämnet enligt läroplanen (jfr Skolverket 2019) är att alla elever ska utveckla sina kunskaper. Därför bör elever med hög kunskapsnivå även få utvecklas. För dessa anledningar bör undervisningen vara varierande där man både låter eleverna arbeta i heterogena grupper och i homogena grupper för att alla elever ska kunna lära sig.

10.1 Sammanfattning av diskussionen

Som det visades i resultatet finns det olika elever med skiftande: kunskapsnivåer, funktionsvariationer, bakgrunder och tankar. Detta innebär att det blir svårt att tillfredsställa alla elevers behov i klassrummet. Sammanfattningsvist kan det konstateras att heterogena grupper inte alltid är ideala, men att samtal i heterogena grupper leder till strategiutveckling.

11. Slutsats

Frågeställning ett handlade om att undersöka vilka strategier elever använder och varför de använder dessa strategier. Resultatet av undersökningen visade att multiplikationsstrategin var den enda relevanta strategin som användes i de fyra grupperna som undersökningen grundar sig på. Därför kan frågeställning ett besvaras med att eleverna använde multiplikationsstrategin. En del elever använde irrelevanta strategier, men de ändrade till multiplikationsstrategin efter det heterogena gruppsamtalet om elevers strategianvändning. Anledningen till att eleverna använde multiplikationsstrategin var för klassrumsnormerna läraren hade skapat. Läraren undervisade enbart om multiplikationsstrategin och eleverna imiterade strategin utan någon uppfattning för varför de räknar på det viset. Inom multiplikationsstrategin valde dock eleverna olika algoritmer att beräkna med och ungefär hälften av eleverna delade upp multiplikationsprocessen i mindre delar för att beräkna arean av en cirkel.

Frågeställning två handlade om att ta reda på ifall elevernas strategianvändning påverkas av samtalen i heterogena gruppsamtal. I och med att eleverna enbart använde en relevant strategi i alla grupper, fanns inga utbyten av olika relevanta strategier. Dock började elever som använde irrelevanta strategier att stegvist använda relevanta strategier efter att ha förstått hur eleverna med relevanta strategier löste problemlösningsuppgifterna om cirkelns area med multiplikationsstrategin. Det fanns även övrig kunskapsutbyte genom att en elev undervisade den andra eleven om att ”avrunda decimaler”. Avslutningsvist kan det konstateras att elever med lägre kunskapsnivå utvecklar sina strategianvändning i heterogena gruppsamtal.

12. Vidare forskning

Som vidare forskning är det möjligt att fortsätta utföra denna studie i andra årskurser samt på andra skolor. Det kan vidare undersökas ifall klassrumsnormerna som läraren skapar påverkar elevernas användning av strategier, samt ifall det framkommer olika strategier i ett klassrum och att det finns möjlighet för strategiutbyte. Det skulle även vara intressant att undersöka ifall undervisning om kvadratcentimeter skulle öka elevernas förståelse för att mäta cirkelns area.

13. Didaktiska implikationer

Denna studie visar att elever med lägre kunskapsnivå lär sig att använda beräkningsstrategier om cirkelns area genom heterogent gruppsamtal. Därför kan läraren placera elever i heterogena grupper för att eleverna ska kunna bli resurser för varandra. När eleverna placeras i heterogena grupper kan läraren rikta uppmärksamheten till att se hur eleverna resonerar kring sina lösningar. På det viset kan läraren notera bristerna i elevernas undervisning om cirkelns area.

Det som uppmärksammades i studien är att eleverna har en svag förståelse för syftet med att beräkna cirkelns area med multiplikationsstrategin. Därför bör lärare undervisa mer om tanken bakom metoden för att beräkna cirkelns area. Undervisningen kan exempelvis utgå från att läraren undervisar eleverna om kvadratcentimeter.

14. Referenslista

Ahrne, G. & Svensson, P. (2015). Att designa ett kvalitativt forskningsprojekt. I:
Ahrne, G. & Svensson, P. (2015). *Handbok i kvalitativa metoder*. 2. uppl. Stockholm: Liber, s.17–31.

Barton, L. (1997). Inclusive education: Romantic, subversive or realistic? *International Journal of inclusive education*. s.231-243.

Björklund, E. & Dalsmyr, H. (2016). *6A Koll på matematik*. Sanoma utbildning: Stockholm.

Bryman, A. (2018). *Samhällsvetenskapliga metoder*. Malmö: Liber.
Classrooms. https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fpsyg.2020.586489/full#S12 [2021-10-18].

Cohen, E. G. & Lotan, R. A. (1995). Producing equal-status interaction in the heterogeneous classroom. I: *American Educational Research Journal*. s.99–120.

Diversity in Mathematics Education for Teaching and Learning (DiME). (2007). Culture, race, power, and mathematics education. I: F. Lester (Ed.), *Second handbook for mathematics teaching and learning* (S. 405-434). Charlotte, NC: NCTM and Information Age Publishing. Elektronisk resurs:
http://jwilson.coe.uga.edu/EMAT7050/Students/Ramsey/Dime%202007.pdf

Filloy, E. & Sutherland, R. (1996). Designing curricula for teaching and learning algebra. I: A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (S. 139–160). Dordrecht: Kluwer Academic.

Fohlin, N. (2000). *Grundbok i kooperativt lärande, vägen till det samarbetande klassrummet*. Studentlitteratur.

Forslund Frykedal, K. (2008). *Elevers tillvägagångssätt vid grupparbete – om ambitionsnivå och interaktionsmönster i samarbetssituationer*. http://liu.divaportal.org/smash/get/diva2:17754/FULLTEXT01.pdf Linköpings universitet. Diss. [2021-10-24].

Huang, H. & Witz, K. (2013). Children's Conceptions of Area Measurement and Their Strategies for Solving Area Measurement Problems. I: *Journal of Curriculum and Teaching*. Taipei Municipal University of Education: Taiwan.

Jakobsson, A. (2001) *Elevers interaktiva lärande vid problemlösning i grupp*. Diss. Malmö: Reprocentralen, Lärarutbildningen Malmös universitet. Elektronisk resurs: https://muep.mau.se/bitstream/handle/2043/7051/ANDERS3.pdf?sequence=1. [2021-10-18].

Karlsson, N. & Kilborn, W. (2018). *Det räcker om de förstår den -En studie av lärares och elevers uppfattningar om multiplikation och multiplikationstabellen*. Stockholm: Södertörns högskola.

Karlsson, N. & Kilborn,W. (2015b). *Matematikdidaktik i praktiken, att undervisa i årskurs 1–6.* Malmö: Gleerups.

Karlsson, N. & Kilborn, W. (2015a). *Problemlösning och matematisk modellering.* Malmö: Gleerups Utbildning AB.

Klang, N. Karlsson, N. Kilborn, W. Eriksson, P. & Karlberg, M. (2020-12-22). *A Cooperative Learning Intervention to Promote Social Inclusion in Heterogeneous Classrooms*. https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fpsyg.2020.586489/full#S12 [2021-10-18].

Nationalencyklopedin, grupparbete. http://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/lång/grupparbete [2021-10-24].

Nationalencyklopedin, heterogen. http://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/enkel/heterogen [2021-10-24].

Nationalencyklopedin, pi. http://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/lång/pi [2021-11-17].

Owens, K. & Outhred, L. (2006). The complexity of learning geometry and measurement. I: A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and feature* (S. 83-115). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers. Elektronisk resurs: https://books.google.se/books?hl=sv&lr=&id=hXkfEAAAQBAJ&oi=fnd&pg=PP3&dq=Handbook+of+research+on+the+psychology+of+mathematics+education:+Past,+present+and+feature&ots=sw9zKxVzop&sig=SmjUDU_xJiIU3GOPPX87dOsFHfM&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false

Rennstam, J. & Wästerfors, D. (2015). *Att analysera kvalitativt material*. I: Ahrne, G. & Svensson, P. (2015). Handbok i kvalitativa metoder. 2. uppl. Stockholm: Liber, s.219–234.

Skolverket (2021). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011: reviderad 2021*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket (reviderad 2017). *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik*. [Elektronisk resurs].

Svensson, P. (2015). Teorins roll i kvalitativ forskning. I: Ahrne, G. & Svensson, P. (2015). *Handbok i kvalitativa metoder*. 2. uppl. Stockholm: Liber, s.208–219.

Vetenskapsrådet (2017). *God forskningssed*. Stockholm: Vetenskapsrådet. [Elektronisk resurs: https://www.vr.se/download/18.2412c5311624176023d25b05/1555332112063/God-forskningssed_VR_2017.pdf]. [2021-11-20].

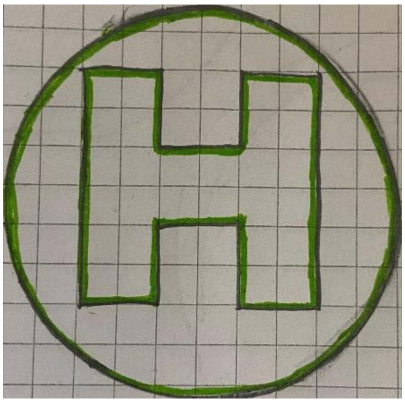
Weber, K. Radu, I. Mueller, L. Powell, A. & Maher, C. (2010). *Expanding Participation in Problem Solving in a Diverse Middle School Mathematics Classroom*. Rutgers University: New Jersey, USA.

Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. I: *Journal for Research in Mathematics Education, 27*, 458- 477. Elektronisk resurs: https://www-jstor-org.till.biblextern.sh.se/stable/pdf/749877.pdf?refreqid=excelsior%3Aef576ef086f12b60221e55a6306ac138

15. Bilagor

15.1 Bilaga 1. Uppgifterna

1. Helikopterlandningsplattan har diametern 34,7 m. Hur stor är arean på plattan? Avrunda till en decimal. Skriv ner din lösning.



2. En studsmatta har diametern 3,8 m. Hur stor är arean? Avrunda svaret till två decimaler. Skriv ner din lösning.

3. En rund spegel har diametern 22 cm. Hur stor är arean? Avrunda till heltal. Skriv ner din lösning.

15.2 Bilaga 2. Samtyckesblankett

Brev till vårdnadshavare

Jag heter Tara Jaddo och läser på Grundlärarprogrammet med interkulturell profil mot årskurs 4–6 vid Södertörns högskola och jag utför nu mitt examensarbete. I mitt examensarbete kommer jag att studera elevers strategianvändning när de löser matematiska problemlösningsuppgifter. Tanken är att eleverna ska få lösa uppgifter först självständigt sedan diskutera deras lösningar i grupp. För att jag ska kunna samla in material från undersökningen på bästa sättet kommer jag att spela in ljudet av elevernas diskussion och spara pappren de skriver lösningarna på. Jag är den enda som kommer att ta del av inspelade materialet, som kommer att raderas när mitt arbete är färdigställt. När jag sammanställer diskussionen i textformat får eleverna nya namn, det inte går inte att identifiera dem för utomstående.

Hoppas att du vill godkänna att ditt barn deltar i undersökningen.
Tack på förhand.

………………………………..…….
(Förälderns/vårdnadshavarens namn) godkänner härmed att

………………………………………….
(Elevens namn) deltar i ovannämnda undersökning.

………………………………………..…..
(Plats och datum)