Södertörns Högskola
Lärarutbildningen
VT2005
Revision C

Namn: Kristina Thornér

Handledare: Anders Blomqvist

Lärobokens roll i matematikundervisningen.
— Allmändidaktisk tillämpning av van Hieles teorier vid introduktion av algebra.

Sammanfattning

Detta arbete är en textanalys av hur några svenska läroböcker i matematik introducerar algebra speglat i van Hieles teorier om tankenivåer vid inlärning. Van Hieles teorier poängterar språket som kunskapsbärare i matematik vilket går som en röd tråd genom analysen. Generellt börjar läroböckerna på van Hieles tankenivå 3. Enligt van Hieles teorier borde undervisningen i algebra börja på nivå 1, vilket då blir lärarens uppgift att göra utan stöd av matematikboken. Förslag på arbetssätt för nivå 1 och 2 ingår.

Nyckelord: van Hiele, läroboksanalys, textanalys, matematikundervisning, matematisk didaktik, algebra.

Abstract

This paper is a text analysis of how some Swedish textbooks in mathematics introduces algebra filtered by van Hiele theories of levels of thinking. The van Hiele theories emphasize that the language constitutes the knowledge objects in mathematics, wich is used all through the analysis. Generally the textbooks start at the third van Hiele's level of thinking. According to the van Hiele theories the teaching of algebra should start at level 1. This then becomes the teachers' task to do without the support of the textbook in mathematics. Ideas on teaching level 1 and 2 are included.

Keywords: van Hiele, textbook analysis, text analysis, mathematical education, mathematics didactics, algebra.

Innehållsförteckning:

Förord

Ett varmt tack till alla som bidragit till denna uppsats: mina handledare, andra lärare, nära och kära, vänner och bekanta. Speciellt vill jag tacka Caroline Ekström från Linköping, som inspirerat mig till att studera van Hieles teorier närmare.

1 Inledning

Finland är världsmästare i matematikundervisning. Lisen Häggblom, lektor i matematikdidaktik vid Åbo Akademi, har publicerat en artikel om orsaker till Finlands framgångar i matematikundervisning (Häggblom 2005). I sin föreläsning *Vad är nyckeln till Finlands framgång i matematik?* i Stockholm 2005-05-03 gav hon som avslutande ord en lista med sex punkter som var viktiga att kontrollera för framgång även i svensk matematikundervisning. Den sista punkten löd: Tydliggör matematikbokens roll! Hon klargjorde att matematikboken är ett stöd, men den får inte definiera matematikundervisningen och man måste som lärare våga gå utanför matematikboken i sin undervisning bl a med orden: Vi tycker mycket om matematikboken i Finland; så mycket att vi vågar lämna den!

Mina egna erfarenheter från praktik i flera skolor i stockholmsområdet är att läroboken får definiera matematikundervisningen i stort sett helt. Matematikböckerna är generellt strukturerade efter att öva beräkningsmetoder, vilket jag upplevde som att många aspekter av matematiken inte togs upp alls. I mitt sökande efter ett praktiskt användbart förhållningssätt till min egen matematikundervisning fick jag rådet att titta på van Hieles teorier. Dessa teorier har jag funnit allmängiltiga, begripliga och dessutom praktiskt tillämpbara. Van Hiele säger själv i inledningen till sin bok:

> When I developed my levels approach it was aimed at the teaching and learning of geometry. This is an unnecessary restriction, however; the teaching and learning of other topics can be improved equally well with the same levels approach. (van Hiele 1986:vii).

Jag tar honom på orden och griper mig verket an!

2 Bakgrund

Det holländska lärarparet Dina van Hiele-Geldof och Pierre M van Hiele doktorerade tillsammans 1957 med varsin avhandling och lanserade där van Hieles tankenivåer vid inlärning baserade på geometriundervisning. Dina van Hiele-Geldof avled inte långt därefter. Pierre van Hiele fortsatte att arbeta inom matematisk didaktik med dessa teorier i 30 år och publicerade 1986 *Structure and Insight* där han själv säger att teorierna är allmändidaktiska teorier giltiga långt utanför matematiken (van Hiele 1986:49,56). Van Hiele utgår hela tiden från undervisningssituationer, till skillnad från många andra forskare. Van Hieles forskning har påverkat det amerikanska skolsystemet i stor omfattning när det gäller geometriundervisning via de rekommendationer som ges ut av organisationen för matematiklärare i USA 'Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics', vanligen kallad Standards (Hedrén 1992: 35). Det finns två hela artiklar om van Hieles teorier i den nu tillgängliga *Encyclopedia of Mathematics Education* (Grinstein, Lipsey 2001:279-280,809-812). Dessutom finns han omnämd i ett antal andra artiklar i samma bok, tex under "Proof, geometric" (s 591) och Space & geometry (s 665, 666, 667) samt refererad på flera andra ställen, t ex (s119).

Van Hiele är, i den mån han över huvud taget är känd i Sverige, känd i samband med geometri. Rolf Hedrén skrev 1991 en artikel om van Hieles tankenivåer i geometri-undervisning "Van Hiele-nivåer och deras betydelse för geometriundervisningen" (Hedrén 1992: 27). Rolf Hedrén uppger själv telefonledes 2005-04-05 att han fick vara mycket noggrann med språket eftersom ingen tidigare skrivit om van Hiele på svenska. Hedrén påpekar också att van Hieles teorier gäller för andra områden än geometri (Hedrén 1992: 28).

3 Syfte och frågeställning

Undersökningens syfte är att undersöka om läroböcker i matematik tar hänsyn till van Hieles allmändidaktiska teorier samt påvisa hur en medveten användning av dessa teorier kan underlätta och förbättra matematikundervisningen för både lärare och elever. Detta undersöks med hjälp av följande frågeställningar:

Tar matematikböcker av idag hänsyn till van Hieles teorier om inlärning vid introduktion av nya ämnesområden?
Hur kan matematikundervisningen förbättras med tillämpning av van Hieles teorier?
Kan man som lärare använda van Hieles teorier som stöd för att planera sin undervisning?

4 Van Hieles teorier

Van Hieles teorier, som de presenteras i *Structure and Insight* (van Hiele 1986) handlar om hur elever, oavsett ålder, lär sig nya begrepp. Dessa teorier består av ett antal centrala komponenter:

1. Struktur och insikt.
2. Språkets betydelse för lärande och insikt.
3. Elevens hierarkiska tankenivåer som bygger på varandra.
4. Fem faser i undervisningen för att föra sina elever från en tankenivå till nästa.
5. Konsekvenser i undervisningen.

Jag beskriver i det följande alla dessa närmare.

4.1 Struktur och insikt

När van Hiele talar om struktur gör han det i den mening gestaltpsykologin avser. Van Hiele definierar inte struktur i sin bok ity han inte anser sig behöva det (s 31), men beskriver ingående karakteristika för ’struktur’ (van Hiele 1986:27):

- Människa eller djur kan reagera på grundval av en struktur i nya situationer.
- Strukturer är objektiva: Andra människor ser (hör eller luktar) en struktur precis som vi gör. Andra människor är kapabla att reagera inför en struktur precis som vi gör.

Inom gestaltpsykologin finns det fyra viktiga egenskaper som styr struktur (van Hiele 1986:28):

1) Det är möjligt att utöka en struktur. Vem som än känner till en del av strukturen, känner också dess fortsättning. Strukturens fortsättning lyder under samma lagar som den givna delen av strukturen.
2) En struktur kan ses som en del av en finmaskigare struktur. Den ursprungliga strukturen berörs inte av det. Spelreglerna ändras inte, de utökas bara. På så sätt är det möjligt att utöka antalet detaljer som deltar i uppbyggnaden av strukturen.
3) En struktur kan ses som en del av en större (more-inclusive) struktur. Denna större struktur har också fler regler. Några av dem definierar den ursprungliga strukturen.
4) En given struktur skulle kunna vara isomorf med en annan struktur. I det fallet definieras de båda strukturerna av regler som hänger samman. Om man studerat den givna strukturen, vet man också hur den andra strukturen är konstruerad.

Gestaltpsykologin säger att insikt kommer av strukturering av det vi uppfattar (van Hiele 1986:7). Van Hiele säger vidare, med referens till sin egen avhandling *Begrip en Inzicht* från

1957, att insikt existerar när en person agerar på ett adekvat sätt med avsikt i en ny situation (van Hiele 1986:24).

4.2 Språkets betydelse för lärande och insikt.

I van Hieles framställning är språket basen för begreppsinlärning, även i matematik. Det är språket som är kunskapsbäraren och har vi inte fått möjlighet att skapa de strukturer som ger ord symbolvärde och länka samman det ordet med and ord med symbolvärde, kan vi inte förstå begreppen. Det är också orden som är basen för tänkande enligt van Hiele.

På längre sikt bestämmer symbolerna riktningen i tanken inom ett ämne varefter det blir möjligt att kartlägga ämnet. Symbolerna fungerar sedan som signaler. Symbolerna får sitt signalvärde genom en lärprocess, som dock ofta är oplanerad. Läraren kan hjälpa till genom att rikta elevernas uppmärksamhet mot inriktningen av tankarna inom ämnet och se till att detta är ett uttalat mål. (van Hiele 1986:62).

I och med att symbolerna får sin mening från, och kan betyda olika beroende på, sitt sammanhang, är det av yttersta vikt att börja varje nytt ämnesområde med en översikt över ämnesområdet och dess plats i verkligheten (van Hiele 1986:59-61). Att klargöra att samma term kan ha annan betydelse i andra sammanhang i undervisningen hjälper eleven att hitta gränserna för det som ska studeras.

När vi introducerar nya ord till ett nytt ämnesområde hävdar van Hiele att vi måste exemplifiera orden först och sedan förklara dem. Det är enbart via exemplen som de ämnestekniska termerna får sin betydelse. Jag tror att detta är ett ännu större problem i små språk som svenska, där vi ofta har låneord från engelska eller latin som ämnestekniska termer. T ex termen *rationella tal* har ju en missvisande betydelse på svenska där rationell oftast betyder ändamålsenlig eller effektiv, medan på engelska säger redan ordet att det handlar om förhållanden, proportioner (engelskans ratio). ”The error that is made is the supposition that the technical language itself is able to express our meaning; in reality the technical language only gets its meaning through the examples.” (van Hiele 1986:57).

Även *Algebra för alla* (Nämnaren Tema 1997) tar upp språkets betydelse för förståelse bl a på sidan 133. Där poängteras att både en representativ bild av ett symboluttryck och kopplingen tillsymboluttrycket måste tolkas genom en mental akt. Bilden talar inte själv om hur den ska uppfattas av den som betraktar den. Det handlar om erfarenhetsgrundad kunskap som bygger på en gemensam vetenskaplig konvention som elever måste introduceras i.

4.3 Van Hieles tankenivåer

Jag väljer att kalla dessa nivåer för tankenivåer eftersom van Hiele själv genomgående i *Structure and Insight* kallar dem 'levels of thinking'. Jag tolkar detta som att det är viktigt för förståelsen att vara tydlig med att det handlar om elevens sätt och förmåga att tänka till skillnad mot alla andra typer av nivåbegrepp som kan skapas och har skapats. Redan på första raden i förordet står ”levels of thinking now commonly known as 'the van Hiele levels'” (van Hiele 1986:vii). Rolf Hedrén har i sin artikel om geometri valt att kalla desamma för ”Van Hiele-nivåerna” (Hedrén 1992:28).

Gemensamt för dessa tankenivåer är att elever, oavsett ålder, passerar dem i nummerordning från ett och uppåt vid inlärning av nytt stoff eller fördjupning inom ämnet (van Hiele 1986:61). Inom varje ämnesområde som har egen logik måste man börja från tankenivå 1 igen. Exempel på ämnesområden inom matematiken där man måste börja från början är aritmetik, geometri, algebra, statistik, bråkdelar osv. Notera att bråkdelsräkning utgör ett eget område eftersom den kräver en helt egen tankestruktur skild från de övriga talen. ”The fractional numbers [...] Here too we deal with a new subject matter that at first has to be developed at the first level.” (van Hiele 1986:99). Inte alla elever når alla nivåerna, men varje elev måste passera den första för att nå den andra osv. På varje nivå förstår eleven endast det språk som är förknippat med den nivån. På varje nivå struktureras språket så att det associeras med begreppet och orden ges symbolvärde och signalvärde. På nästföljande nivå skapas nya, överordnade, symboler som bygger på symbolerna från föregående nivå, som efter bearbetning får signalvärde.

Människor använder bara denna strukturerade typ av tänkande när vi utvärderar något. När vi använder det vi redan lärt oss är det ofta vi agerar direkt, utan tanke, på en struktur som har signalvärde. T ex när vi kör bil växlar vi automatiskt utan direkt tanke när vi hör att motorvaret går upp eller ner. (van Hiele 1986:127-128).

4.3.1 Tankenivå 1: Igenkänning (Visualizing)

På den första tankenivån lär sig eleven att se och uppfatta strukturer som hör till ämnet. Eleven styrs av ett fysiskt påtagligt nätverk av relationer. Van Hiele poängterar att det handlar om saker som finns i verkligheten, Poppers värld 1 (van Hiele 1986:127ff). Eleven är inte medveten om detaljer och hur detaljerna samverkar eller påverkar helheten. Se betyder här uppfatta med sina sinnen, dvs även känna, lukta och höra. Van Hiele hänvisar till detta på flera ställen bl a sidan 27 och 127. Struktur innebär här struktur i gestaltpsykologisk mening, se 4.1 Struktur och insikt. Från dessa strukturer skapas symboler som tillhör ämnet. Viktigt är också att utreda i vilket sammanhang dessa symboler förekommer. Symbolerna är kanske bilder från början, ersätts av ett ord för att möjligen bli en matematisk symbol i nästa steg. (van Hiele 1986:61). På tankenivå 1 känner inte eleven några behov av att lösa problem av egen drivkraft, eleven är fullt upptagen med att utforska ett nytt område. (Van Hiele 1986:66).

Exempelvis för geometri beskrivs tankenivå 1 i Hedrén (Hedrén 1992:28):

> *Igenkänning*. (Visualisering.) Eleven lär sig vissa termer och känner igen en geometrisk figur som en helhet. Eleven tar ingen hänsyn till figurens delar. En elev på denna nivå kan till exemplel känna igen en bild av en rektangel men är i allmänhet inte medveten om några egenskaper hos rektangeln, som t ex att den har parallella sidor. Eleven liknar gärna rektangeln med t ex en dörr eller en fönsterruta.

I exemplet aritmetik består tankenivå 1 av igenkänning av siffror, tal och räknetecken, t ex =, som bilder (van Hiele 1986:s 51).

4.3.2 Tankenivå 2 Analys

Inom tankenivå 2 ska de symboler som skapats inom tankenivå 1 analyseras, deras egenskaper sorteras och knytas ihop till ett nätverk av relationer, en struktur. Symbolerna kommer att förstås utifrån en strukturerad uppsättning egenskaper. I det arbetet skapas samtidigt nya symboler på en överordnad nivå. (van Hiele 1986:49ff). Språket är beskrivande runt orsaker, logik eller andra relationer som kan observeras (van Hiele 1986:86).

Exempelvis för geometri beskrivs tankenivå 2 i Hedrén (Hedrén 1992:28):

> *Analys*. Eleven kan analysera egenskaper hos figurer empiriskt genom att vika papper, mäta, rita på rutat papper eller använda geobräde. På denna nivå kan eleven inse att motstående sidor hos en rektangel är parallella och kongruenta men hon kan ännu inte se sambandet mellan rektanglar eller kvadrater och rätvinkliga trianglar. Hon vet inte heller att en kvadrat kan ses som en rektangel eller som en romb.

Aritmetiken på denna nivå handlar om sambanden mellan tal i konkreta uträkningar av typen 4 x 3 = 12 eller 6 + 8 = 14 (van Hiele 1986:s 51).

4.3.3 Tankenivå 3 Abstraktion

På tankenivå 3, abstraktion, behandlas logiska samband mellan de sammanlänkade symboler som ordnats på tankenivå 2. Nu blir materialet mer teoretiskt och mer allmängiltigt. Fortfarande finns ingen uppfattning runt hur man drar nya slutsatser från det man vet, deduktion. De samband som skapas på denna tankenivå är inte alltid fysiskt naturliga, många gånger är det en vetenskaplig konvention, t ex sambandet att alla kvadrater är romber. Dessa samband går att argumentera emot och då också komma fram till något annat samband som indivden accepterar.

Språket på tankenivå 3 har en mycket mer abstrakt karaktär än språket på den beskrivande nivån, tankenivå 2, då den behandlar orsakssammanhang, logiska samband och andra samband i strukturen som inte är synliga på tankenivå 2. (van Hiele 1986:86).

Exempelvis för geometri beskrivs tankenivå 3 i Hedrén (Hedrén 1992:28):

> *Abstraktion*. Eleven kan logiskt ordna figurer, t ex alla kvadrater är rektanglar, men alla rektanglar är inte kvadrater. Hon förstår de inbördes sambanden mellan figurer och inser vikten av korrekta definitioner. Även om hon förstår sambandet mellan mängden av kvadrater och mängden av rektanglar samt mellan mängden av parallellogrammer, kan hon inte härleda varför t ex diagonalerna i en rektangel är kongruenta. Hon förstår inte deduktionens roll i geometrin.

Aritmetiken på tankenivå 3 handlar om generella samband mellan tal, t ex a x (b + c) = (a x b) + (a x c) (van Hiele 1986:51). Nu kan vi ju, med all rätt, argumentera att detta är ju algebra. Algebra kan ses både som ett eget område samt utgöra tankenivå 3 i aritmetiken. Med enbart aritmetik kan vi bara med siffror ge exempel på generella samband eller beskriva de generella sambanden rent retoriskt. Van Hiele beskriver detta som nivåreduktion (van Hiele 1986:53):

> Another circumstance causing us to lose sight of the real relation between levels is *level-reduction*. It is possible to transform structures of the theoretical level with the help of systems of signs, by which they become visible. So algebra gives a transformation of structures of the theoretical level of arithmetic and formal logic gives a transformation of the theoretical level of algebra.

Denna tredje tankenivå ser olika ut för olika vetenskaper och är möjligen det som särskiljer olika vetenskaper från varandra (van Hiele 1986:51).

4.3.4 Tankenivå 4 Deduktion

På tankenivå 4, deduktion, behandlas logiska kongruenser och slutledningar. Eleven kan här hantera och förstå vikten av axiom, satser och bevis i matematiken. Vi närmar oss här filosofin.

Exempelvis för geometri beskrivs tankenivå 4 i Hedrén (Hedrén 1992:28):

> *Deduktion*. Eleven förstår betydelsen av deduktion och den roll axiom, satser och bevis spelar i geometrin. På denna nivå kan eleven använda axiom för att bevisa påståenden om t ex rektanglar och trianglar, men hennes tänkande är i allmänhet inte så precist att hon förstår nödvändigheten av axiom.

Van Hiele varnar här för att i matematikundervisningen sänka språkets nivå till tankenivå 3. Det är viktigt att introducera bevis med nyckelorden 'nödvändigt och tillräckligt'. Han tar som exempel två olika bevis för att de tre bisektriserna till en triangels tre vinklar har en gemensam punkt. Dels kan det bevisas med hjälp av kongruenta trianglar vilket ger ett för eleven enklare språk men där eleven inte behöver tänka på tankenivå 4. Dels med hjälp av insikten att ett logiskt samband kan vara detsamma som ett annat. (van Hiele 1986:46). Jag har bilagt ett längre citat om detta i bilaga 1 sidan 1.

4.3.5 Tankenivå 5 Stringens

Denna tankenivå finns inte definierad av van Hieles, men finns med i Hedréns artikel. För geometri beskrivs tankenivå 5 i Hedrén (Hedrén 1992:28):

> *Stringens*. Eleven förstår vikten av precision, när man arbetar med geometrins grunder, som t ex Hilberts axiomsystem för geometrin. Hon kan utveckla en teori utan användning av konkreta föremål. Hon kan t ex också analysera och jämföra euklidisk och icke-euklidisk geometri.

I en undersökning om SOLO-taxonomi har Peter Nyström refererat till van Hieles tankenivåer och uppger där en amerikansk referens för den femte nivån som han kallar 'sträng nivå' (Nyström 1998:31).

Van Hiele påpekar att han och hans fru försökte inte ens att beskriva högre nivåer än tankenivå 4. De lägre nivåerna är de som har avgörande inflytande i skolan. Om eleverna inte förstår vad läraren säger är det på tankenivåerna 2-4 misstagen sker, inte på nivå 5 eller högre. Van Hiele går till och med så långt att han säger: ”So I am unhappy if, on the ground of my levels of thinking, investigations are made to establish the existence of fifth and higher levels. This is a method to realize one’s theoretical lusts, but I would much prefer that a beginning be made on the improvement of education with the aid of the levels of thinking.” (van Hiele 1986:47).

4.4 Faser i arbetet att uppnå nästa tankenivå

I arbetet med att erövra nästa högre numrerade tankenivå passerar varje elev fem faser enligt van Hiele (van Hiele 1986:96-97, 176f). Dessa faser styrs av läraren i undervisningssituationen.

1. *Information (Information).*
2. *Vägledd kartläggning (Bound orientation or Exploration).*
3. *Tydliggörande (Explicitation).*
4. *Fri kartläggning (Free orientation).*
5. *Integration (Integration).*

Fas 1 *Information*: Eleven bekantar sig med arbetsfältet. Fas 1 sker alltid genom att läraren berättar för eleverna med hjälp av välkända språksymboler om det sammanhang som ska studeras.

Fas 2 *Vägledd kartläggning:* Eleven vägleds i sin utforskning av arbetsfältet av uppgifter (skapade av läraren eller eleven) med olika relationer till det nätverk av samband (struktur) som ska skapas. Lärarens insats är här viktig men eleven är själv kapabel att läsa in relationer mellan språksymbolernas hela struktur, eller mellan former varur språksymboler skapas. Läraren hjälper eleven att spåra dessa relationer som det nu är viktigt att de uttalas och diskuteras. Rätt uppgifter till eleven hjälper denne att forma en lämplig bas för tänkande på nästa högre nivå.

Fas 3 *Tydliggörande:* Eleven blir medveten om sambanden, försöker uttrycka dem i ord och de lär sig det tekniska språk som följer med ämnet. Denna fas klargör strukturerna som finns bakom uppgifterna. Detta klargörande sker i klassdiskussioner. Eleverna får ge sina åsikter om vilka regelbundenheter de funnit under lärarens ledning. Läraren ser till att eleverna lär sig rätt fackspråk. Det är viktigt att elever utbyter tankar runt det de erfarit under fas 2.

Fas 4 *Fri kartläggning*: Eleven lär sig med allmänna uppgifter att finna sin egen väg genom nätverket av samband, strukturen. Eleverna vet nu vad ämnet handlar om, de har uppmärksammat samband från konkreta situationer och de känner nu till relevanta språksymboler. De måste nu lära känna studiefältet från alla håll med hjälp av ett antal olika utformade uppgifter.

Fas 5 *Integration*: Eleven skapar en översikt över det hon lärt sig av ämnet, skapar en översikt över det nyligen skapade nätverket av samband som nu finns tillgängligt för eleven. I den fortsatta fria utforskningen av studiefältet förlorar nu symbolerna gradvis sitt visuella innehåll utvecklas till förbindelser i det nätverk av samband som skapats. Genom denna fria kartläggning blir eleverna så hemtama i denna tankevärld att symbolerna kan förutses. Kunskapen har internaliserats och eleven når nästa tankenivå.

Det är först inom fas 5 som verklig problemlösning blir intressant för eleven och där problemlösning kan tjäna som hjälpmedel för eleven att internalisera kunskapen.

Perioden när en elev arbetar för att gå från tankenivå 1 till tankenivå 2 kallar van Hiele Period 1. Arbetsperioden mellan tankenivå 2 till tankenivå 3 Period 2 osv. (van Hiele 1986:63).

4.5 Konsekvenser för undervisningen

Enligt van Hiele är det vanligt att läraren startar undervisning om ett ämnesområde på en för hög tankenivå. Eleven förstår därmed inte det språk som läraren använder, och eleven gör inga framsteg. Läraren å sin sida blir frustrerad och förstår inte varför eleven inte förstår några förklaringar fast han försöker belysa problemet från alla håll och kanter.

Om läraren instruerar om allt, hindrar det elevens inlärning. Van Hiele menar istället att vi måste visa på ämnesområdets plats, innehåll, begränsningar, allmänna tankeinriktning osv, men att det är elevens undersökningar, tankar och diskussioner som formar den tankestruktur som gör kunskapen tillgänglig och användbar. Om läraren försöker påtvinga eleverna sin egen tankestruktur hindras eleverna i sin fortsatta utveckling för de kan inte återkalla signifikanta länkar tillbaka till verkligheten såvida inte just det exempel uppstår som läraren instruerade med. Om meningen med undervisningen är att skapa insikt, och insikt definieras som att reagera adekvat med avsikt i nya situationer, blir lärarens uppgift att visa på de ämnesfält och tillhörande traditioner som eleven ska studera. (van Hiele 1986:62-63). Ett längre citat finns i bilaga 1, s 2.

Jag vill här lägga till ett forskningsresultat från Marton, Dall'Alba & Tse från 1992 att utantillinlärning inte med nödvändighet är av ondo, det beror på elevens inställning till varför hon lär sig utantill: Om man lär sig utantill för att rabbla upp senare är det av ondo, om man lär sig utantill med intentionen att vid varje genomläsning fördjupa sin kunskap och förståelse är det av godo (Marton, Booth 2000:62).

5 Metod och källor.

Jag använder mig av van Hieles allmändidaktiska teorier så som de presenteras i *Structure and Insight* (1986) och applicerar dem på undervisning inom ett område inom matematiken, som inte är geometri, i form av ett case. Jag väljer att tillämpa hans teorier inom algebra. Algebra är ett område där man behöver starta från van Hieles nivå 1 och där introduktionen sker inom ramen för den obligatoriska skolan. Den har också fördelen att vara ett område som riktar sig mot logiska resonemang snarare än enbart mot räknefärdighet med symboler. Dessutom använder algebra fler symboler än bara siffror.

En mycket intressant aspekt av van Hieles teorier är hans betoning av språkets roll för elevernas förståelse av matematik. Han hävdar att språket och orden är kunskapsbärare i matematik. Det är vanligt i Sverige att betrakta matematik som ett universiellt språk. Tex låter vi regelbundet nykomna svenskar läsa matematik i vanlig klass. Språkets betydelse för förståelse av matematiken går som en röd tråd igenom analysen.

Undersökningen görs i form av en textanalys av läroböcker i matematik. Den metod jag har använt mig av är inspirerad från *Innehåll i text* av Gunnel Källgren (Källgren 1979:127). Koncentrationen ligger på innehållskomponenter och progression i texten. Några svenska matematikböckers möjligheter till stöd för undervisningen vid introduktion av algebra analyseras. Studien är en ren textanalys av läroböcker förutom att den kompletteras med en intervju med en lärare, som använt sig av van Hieles allmändidaktiska teorier.

De innehållskomponenter som identifierats är uppgifter och fakta som introducerar algebra. Jag har sedan tittat på hur de presenteras både grafiskt och logiskt. Vidare har jag analyserat i vilken ordning dessa komponenter presenteras och i vilket syfte. Varje innehållskomponent har också klassificerats i van Hieles tankenivåer. Sedan har jag jämfört med van Hieles teorier för att se om introduktionen av algebra stämmer med dem eller inte.

Språket som beskriver innehållskomponenterna är indikatorer på van Hieles tankenivåer. Van Hieles tankenivåer känns igen på det språk som används för att behandla ämnet, antingen det finns i läroboken, i lärarens undervisning eller hos eleven. Utsagor om logiska samband hör t ex till tankenivå 3. Beskrivningar i form av upplevelseintryck till tankenivå 1 osv. På samma sätt kan vi titta på uppgifternas natur: de som handlar om logiska samband finns på tankenivå 3, de som handlar om hur saker ser ut som bild eller på ytan befinner sig på tankenivå 1, de som handlar om hur det omedelbart observerbara är uppbyggt befinner sig på tankenivå 2 osv. I den analyserade lärobokstexten har språket och uppgifternas natur använts som indikatorer för att identifiera vilken av van Hieles tankenivåer som brukas. Ytterligare bearbetning av resultat har sedan skett med deduktiv slutledning.

Intervjun är gjord telefonledes och intervjupersonen har sedan fått läsa uppsatsen för att godkänna mitt referat av intervjun och min tolkning och användning av innehållet. Data som ålder och födelsedagar är inte autentiska.

De matematikböcker som använts är inte utvalda efter något annat kriterium än att de används i skolor i Stockholms län idag. Jag har använt Bonnier Utbildnings serie *Matte Direkt, Tetra* från Gleerups, *Mattestegen* från Natur & Kultur, *Matematikboken* från Almqvist & Wiksell. I referenserna har jag använt mig av egna förkorningar för att hänvisa till de olika matematikböckerna. Dessa förkortningar är när det gäller *Matte Direkt*-serien t ex konstruerade med kodordet Matte plus årskursen som boken är avsedd för, t ex (Matte år 7). För vissa årskurser i grundskolan kan det finnas flera böcker ur samma serie avsedda för samma årskurs som särskiljs med bokstavskod som återfinns i bokens titel, t ex (Matte år 5A).

6 Begränsningar

Jag begränsar undersökningen till introduktion av algebra för att se om svenska läroböcker tar hänsyn till van Hieles tankenivåer vid introduktion av ett ämnesområde som har egen logik skild ifrån tidigare undervisning. Van Hieles teorier i samband med geometri är så mycket mer genomarbetade att ytterligare ett arbete inom geometri inte skulle bidra lika mycket till diskussionen. Valet av arbetets omfattning begränsas av att detta ska bli en C-uppsats och det medger inte en undersökning av fler områden eller att följa hur läroböcker stödjer progression i van Hieles tankenivåer inom ett ämnesområde. Jag har inte heller kunnat göra en komplett undersökning av hur konsistent språket används när det gäller olika begrepp.

7 Forskningsläge

Van Hiele är enbart känd i Sverige i samband med geometri. Hedréns artikel var den första på svenska (Hedrén 1992). Nyström jämför med van Hieles tankenivåer vad gäller geometri i en jämförande undersökning mellan skolverkets betygskriterier, SOLOtaxonomin och van Hieles tankenivåer (Nyström 1998). Professorn i matematikpedagogik vid lärarhögskolan i Stockholm, Astrid Pettersson, uppger per telefon 2005-04-07 att de känner till van Hiele och använder hans teorier där de är tillämpliga: inom geometri. De har inte varit uppe till diskussion ur allmändidaktisk synpunkt.

Van Hieles teorier från 1957 blev populära i Sovjetunionen under 60-talet för geometriundervisning. Senare, på 70-talet, uppmärksammades Sovjets nya undervisning, och på 80-talet togs van Hieles teorier upp i USA och har där påverkat undervisningen i geometri starkt (t ex Whitman et al 1997; Mistretta 2002; Swafford 1997; Thornton 1998; Grinstein, Lipsey 2001). När han blev populär i USA skrev van Hiele det verk som jag baserat min uppsats på, *Structure and Insight*. I den boken har van Hiele utvecklat sina teorier vidare från 1957 års version (van Hiele 1986). På senare tid finns även artiklar som tar upp van Hieles teorier i ett mer allmänt perspektiv om lärande dock för matematikundervisning (Pegg 2002).

Jag har bara hittat en amerikansk referens som har undersökt läroböcker utgående från van Hieles teorier (Fuys, Geddes 1984). Den undersökningen gällde hur läroböckerna använde språket runt geometribegrepp. Resultatet blev att läroböckerna var inkonsistenta i sin användning av begrepp, samt att böckerna hindrade elevens vidare utveckling i van Hieles tankenivåer. En tidigare artikel har utvärderat matematikböcker (Rudolph, Kane 1970).

Det finns ett antal svenska undersökningar av lärobokens roll i matematikundervisningen, dock ingen i relation till van Hieles teorier. Samtliga verk jag har tittat på säger att läroboken har en dominerande ställning i undervisningen för både lärare och elever. Niklas Bremler har tittat på svenska läroböcker i matematik och kommit fram till att de generellt promoverar procedurkunskap. Böckerna skrivs oftast av en liten grupp manliga veteranförfattare. Bremler säger också att eftersom matematikboken är så central i svensk undervisning speglar kvaliten på dess innehåll kvaliteten på svensk skolmatematisk diskurs (Bremler 2003). Monica Johansson konstaterar att läroboken utgör de facto implementeringen av läroplanens mål, men undersökningen visar att dessa mål endast delvis finns med i läroböckerna (Johansson 2003).

Anna Brändström har undersökt hur läroböcker i matematik stöjer differentierade uppgifter för eleverna med resultatet att spännvidden i variationen är liten och matematikuppgifterna ligger på en låg nivå för samtliga elever (Brändström 2005). Rudolf Strässer har gjort en genomgång av forskningsläget i matematisk didaktik 2005 för vetenskapsrådets räkning (Strässer 2005). Sahlin har gjort en genomgång av forskningsläget 1990-1995 i Sverige när det gäller barn med matematiksvårigheter (Sahlin 1997). Hon refererar bl a Magne och Klewborn. Magne (Magne 1990) identifierar fyra orsaker till elevers misslyckanden i matematik: otillräcklig språklig utveckling, osystematisk metakognitiv handledning, försummad konkret erfarenhetsutveckling, emotionella och sociala störningar av arbetsprocesserna (Sahlin 1997:22). Klewborn (Klewborn 1992) har kommit fram till att grundproblemet med svensk matematikundervisning kan sammanfattas i fyra punkter: bristande helhetssyn, alltför hård läroboksstyrning, brist på konkretion och verklighetsförankring samt låsning vid formella lösningsmetoder (Sahlin 1997:27).

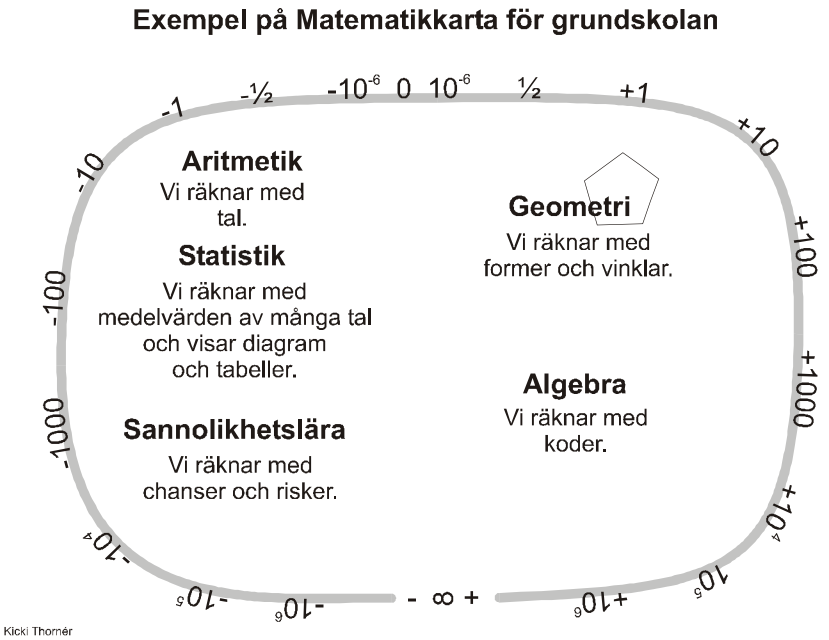
Persson har undersökt elevers algebraförståelse longitudinellt och noterar att ”tröskeleffekter då begreppsutvecklingen tog plötsliga ’språng’ var vanliga” (Persson 2005:56). Samma artikel kommer fram till att förvånansvärt många gymnasieelever har svårt för att uttrycka matematiska tankar i en berättande text, något de ser som en av de språkliga huvudfaktorerna för lärande (Persson 2005:50). Österholm har gjort en studie av elevers förståelse av innehållet i matematiska texter och kommit fram till att ren retoriskt framställd matematisk text är lättare att förstå än text innehållande matematiska symboler (Österholm 2004). Bratt & Wyndham tar upp språkets betydelse för matematikundervisning och –inlärning (Bratt, Wyndham 1996:59-64)

8 Tillämpningar av van Hieles teorier.

8.1 Översikt över studiefältet

En aspekt som det inte finns något stöd i alls i de matematikböcker jag studerat (Matte år 7; Matte år 8; Matte år 9; Matte3000 A; Matte3000 AB) är just översikten av studiefältet. Det tas inte upp alls. Frågan är hur ofta vi svenska matematiklärare visar en plansch eller karta över den matematik som behandlas i grundskola eller gymnasium? Visar vi någonsin hur olika matematiska verktyg relaterar till varandra? Åtminstonne matematikböckerna är sektionerade efter olika beräkningsmetoder som behandlas var för sig i separata avsnitt. Självklart borde vi kunna skapa en paraplyvy över matematik lika gärna som över andra ämnen. Min tolkning av vad van Hiele vill är att vi ska visa eleverna de aspekter som är relevanta för att skapa tankestrukturer mot andra områden de redan känner till men också få en översiktlig struktur på själva området. Den senare aspekten behandlas av andra svenska didaktiker som paradoxen att man behöver kunna något om det som ska läras för att kunna lära sig (t ex Kullberg 2004:75).

Exempel på en mycket översiktlig karta över matematiken i grundskolan och gymnasiets allmänna linjer ses i Figur 1. Varje delområde kan beskrivas mer detaljerat efter behov. Det är viktigt att arbeta med ordförståelsen bakom termerna. Jag tror dock inte på att ersätta korrekta termer med andra förenklade. Då berövar vi eleven möjligheten att själv läsa och förstå litteratur inom området.



Figur 1: Exempel på översikt över grundskolans matematik.

Med en sådan översikt kan det bli lättare både för läraren och eleven att hålla rätt på vilka begrepp som hör till vilket område, vilka beräkningsmetoder som avverkats, vilka beräkningsmetoder som hänger samman och hur, att berätta om historiken bakom, etymologin runt det matematiska fackspråket, och kanske till och med drista sig till att peka på kopplingar i andra fält som kultur eller ekonomi t ex. Dylika kopplingar underlättar också för eleven att minnas stoffet.

Likaså när ett nytt matematiskt verktyg (beräkningsmetod) ska introduceras kan en översikt dels över själva beräkningsmetoden dels den allmänna matematiköversikten bidra till skapande av struktur och förståelse. Den enskilda beräkningsmetoden får då en plats i den allmänna matematiköversikten där också kopplingar till andra beräkningsmetoder kan ses. Översikt över den enskilda beräkningsmetoden kan avhandla dels ordens etymologi, metodens historia, vad metoden används till och några övergripande karakteristika.

8.2 Introduktion av Algebra

8.2.1 Analys av Matte Direkt år 7.

I Bonnier Utbildnings matematikserie Matte Direkt introduceras algebra i boken för år 7, kapitel 6, sidan 170 (Matte år 7:170-201). Avsnittet börjar med ett försättsuppslag, en sk inspirationssida, med mål i punktform plus en talgåta där uttrycket är oberoende av variabeln. Sedan följer en grundkurs följt av ett diagnostiskt test. Behöver eleven repetera följer därefter sk 'blå kurs' s 184-189 annars rekommenderas fördjupningskurs, sk 'röd kurs' sidorna 190-199. Kapitlet avslutas med en sammanfattning.

Målen för kapitlet som de punktas på inspirationssidan, s171, är följande:

- Tolka uttryck skrivna med tal
- Beräkna ett uttryck skrivet med flera olika räknesätt
- Tolka uttryck skrivna med variabler
- Beräkna ett uttrycks värde
- Lösa enkla ekvationer

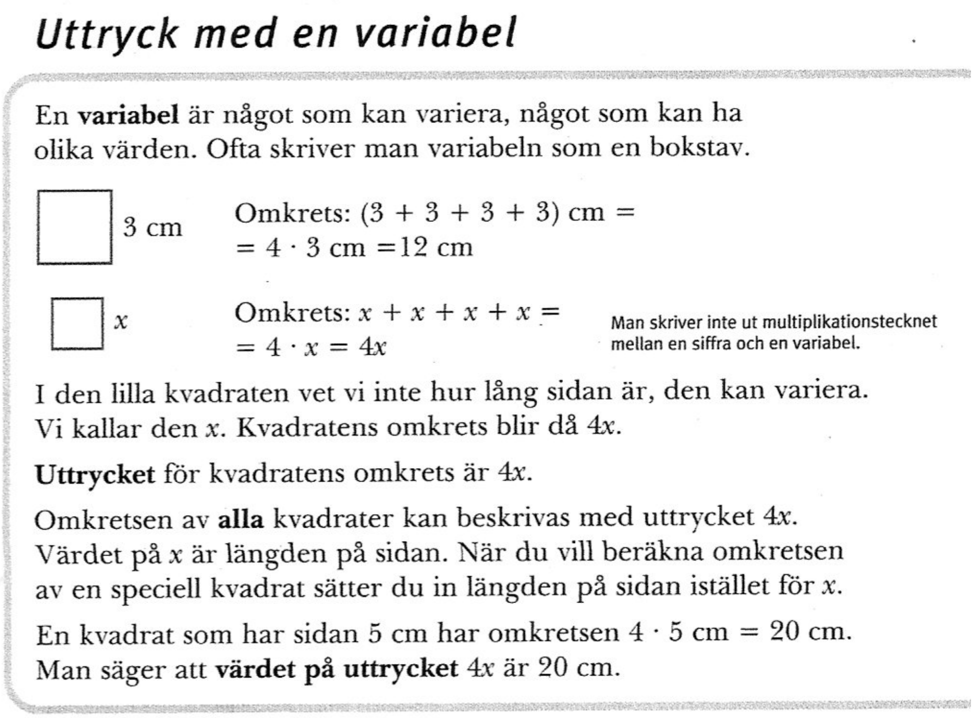
Varje sida i grundkursen har ett tema:

1) Talgåta som diskussionsuppgift
2) Uttryck med flera räknesätt
3) Uttryck med en variabel
4) Uttryck med flera variabler
5) Tolka uttryck
6) Vi räknar ut det hemliga talet
7) Ekvationer
8) Talgåtor och ekvationer
9) Diagnostiskt test

Varje tema, utom diskussionsuppgifterna, har dels en faktaruta som beskriver hur man bör bära sig åt, följt av övningsuppgifter. Boken har också facit. Helhetsintrycket blir ett förföriskt välordnat material avsett för självstudier.

Enligt van Hieles teorier borde vi börja undervisningen med en översikt över studiefältet. Det finns, som tidigare behandlats i 8.1 Översikt över studiefältet, inte någon översikt alls över algebra som studiefält i denna bok.

Matte Direkt för år 7 börjar algebraavsnittet med att introducera begreppet *uttryck*. Det görs med hjälp av en smyckesäljande pirat och uttrycken är aritmetiska uttryck för kostnaden av kombinationer av smycken, som innehåller flera räknesätt. Faktarutan tar också upp prioriteringsordningen mellan räkneoperationer. Sedan följer 17 uppgifter varav 15 handlar om att förenkla ett aritmetiskt uttryck och ersätta med ett tal, medan 2 handlar om att själv konstruera ett aritmetiskt uttryck.



Uttryck med en variabel

En **variabel** är något som kan variera, något som kan ha olika värden. Ofta skriver man variabeln som en bokstav.

3 cm — Omkrets: $(3 + 3 + 3 + 3)$ cm = $= 4 \cdot 3$ cm $= 12$ cm

x — Omkrets: $x + x + x + x =$ $= 4 \cdot x = 4x$

Man skriver inte ut multiplikationstecknet mellan en siffra och en variabel.

I den lilla kvadraten vet vi inte hur lång sidan är, den kan variera. Vi kallar den x. Kvadratens omkrets blir då $4x$.

Uttrycket för kvadratens omkrets är $4x$.

Omkretsen av **alla** kvadrater kan beskrivas med uttrycket $4x$. Värdet på x är längden på sidan. När du vill beräkna omkretsen av en speciell kvadrat sätter du in längden på sidan istället för x.

En kvadrat som har sidan 5 cm har omkretsen $4 \cdot 5$ cm $= 20$ cm. Man säger att **värdet på uttrycket** $4x$ är 20 cm.

Figur 2: Faktaruta ur Matte Direkt år 7, sidan 174.

Följande sida introducerar begreppen *variabel*, *uttryck med en variabel*, *värdet på uttrycket*. Faktarutan kan ses i Figur 2. Denna faktaruta använder ett språk som behandlar logiska samband mellan egenskaper hos matematiska symboler, vilket tillhör van Hieles tankenivå 3.

På van Hieles tankenivå 1 ser eleven den verkliga världen och knyter an till sådant eleven redan känner till. När algebra introduceras är det alltså första gången eleven kommer i kontakt med matematik som inte fokuserar på siffror och tal. Bara att ta till sig att matematik kan vara något annat än siffror och tal är ett stort steg som inte finns med i framställningen. Vidare introducerar boken symbolen X som en självklarhet utan förklaringar. Texten säger enbart ”I den lilla kvadraten vet vi inte hur lång sidan är, den kan variera. Vi kallar den *x*. Kvadratens omkrets blir då 4*x*.” (Matte år 7:174). Vad förstår eleven då enligt van Hiele? Troligen en bild av en fyrkant med vidhängande kryss. Eleven borde på tankenivå 1 inte kunna uppfatta att x är en kod för längden på kvadratens sida. Att använda bokstaven x som symbol för något vi inte vet, i detta fall längden på en sträcka, kan säkert kännas förvirrande och uppta elevens tankeverksamhet och därmed hindra arbetet med att förstå sammanhangen.

Likaså visas i samma faktaruta att $X + X + X + X = 4*X = 4X$ som en parallell till $(3 + 3 + 3 + 3)\text{cm} = 4*3\text{ cm} = 12\text{ cm}$. Det finns en förklaring till det sista ledet i uttrycket med X med mindre stil till höger: ”Man skriver inte ut multiplikationstecknet mellan en siffra och en variabel.” (Matte år 7:174) Hur uppfattar då eleven detta? Det lättaste som eleven troligen kan uppfatta på tankenivå 1 är *proceduren* att ersätta en siffra med bokstaven X. Att enheten cm försvann obegripligt är inte lika lätt att hinna uppfatta.

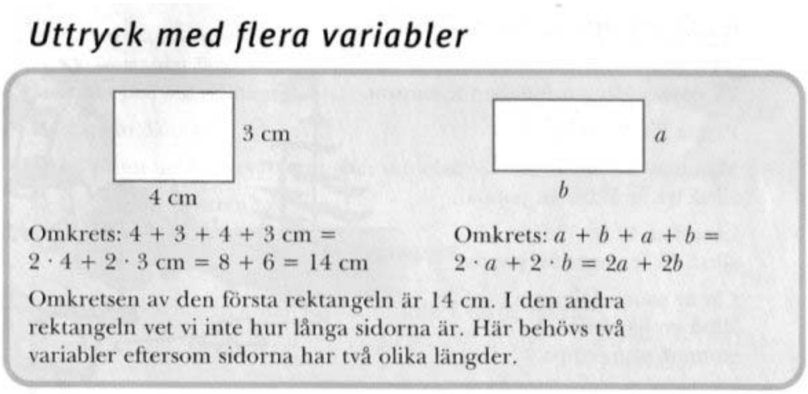
Van Hiele anser att det är viktigt att eleven själv får konstruera länkarna i sin begreppstruktur, se avsnitt 4.5. Variation av den aspekt som ska läras in är nödvändig för att just det stoffet ska framträda (Carlgren, Marton 2004:140-141,149ff). Tittar vi igen på sidan 174 i Matte Direkt för år 7, ser vi att faktarutan koncentrerar sig på att tala om hur eleven bör bära sig åt. De efterföljande 7 uppgifterna handlar alla om omkrets: Eleven ska räkna fram omkretsen uttryckt i x för olika figurer där varje delsträcka är given till x utan att ange enhet. I de två sista uppgifterna, markerade som krävande extra tankemöda, är längden på delsträckorna givna till y respektive 3y. Här införs alltså ännu en ny symbol för en variabel utan förklaring.

Hur mycket begär vi att eleven ska lära sig ur denna enda sida i matematikboken? Listan nedan är min egen reflektion och gör inte anspråk på att vara komplett svar på frågan utan fastmer ett axplock av aspekter som enkelt kan identifieras:

Jag har försökt att gruppera listan efter van Hieles tankenivåer så att 1-5 tillhör tankenivå 1; 6-16 tillhör tankenivå 2; 17-20 tillhör tankenivå 3. Jag medger att listan ovan förvånar mig själv, jag hade inte väntat mig detta resultat. Jag har dock efter viss efterforskning hittat en kursredovisning som undersökt flera matematikböcker i relation till van Hieles nivåer med avseende på geometri som kommit till likartat resultat (Ekström 2001).

Tabell 1: Stoff som eleven förutsätts lära sig på första sidan om algebra.

Tankenivå 1	
1	Matematik kan innehålla annat än siffror och tal
2	Förstå att bokstäver inte bara är text
3	Förstå att bokstäver kan betyda olika saker i olika sammanhang
4	Förstå att man kan räkna med andra symboler än siffror
5	Förstå att man inte alltid ska räkna ut något i matematik
6	Man kan ersätta något vi inte vet storleken på med en symbol
Tankenivå 2	
7	Förstå hur vi väljer symbol
8	Förstå till vad vi väljer symbol
9	Förstå minst tre nya matematiska begrepp
10	Förstå att symbolen kan betyda något som är olika stort
11	Förstå att symbolen kan betyda en storhet som har ett specifikt värde
12	Förstå att symbolen kan betyda ett tal
13	Tolka uttryck med variabler
14	Förstå vad variera innebär
15	Förstå vad symbolen representerar
16	Förstå att symbolen kan vara vilken bokstav som helst
Tankenivå 3	
17	Förstå att symbolen kan behandlas som en storhet
18	Förstå att symbolen kan också behandlas som ett tal
19	Man kan räkna ut en formel för omkretsen på alla storlekar på en kvadrat
20	Förstå att aritmetiska samband gäller även för algebraiska symboler

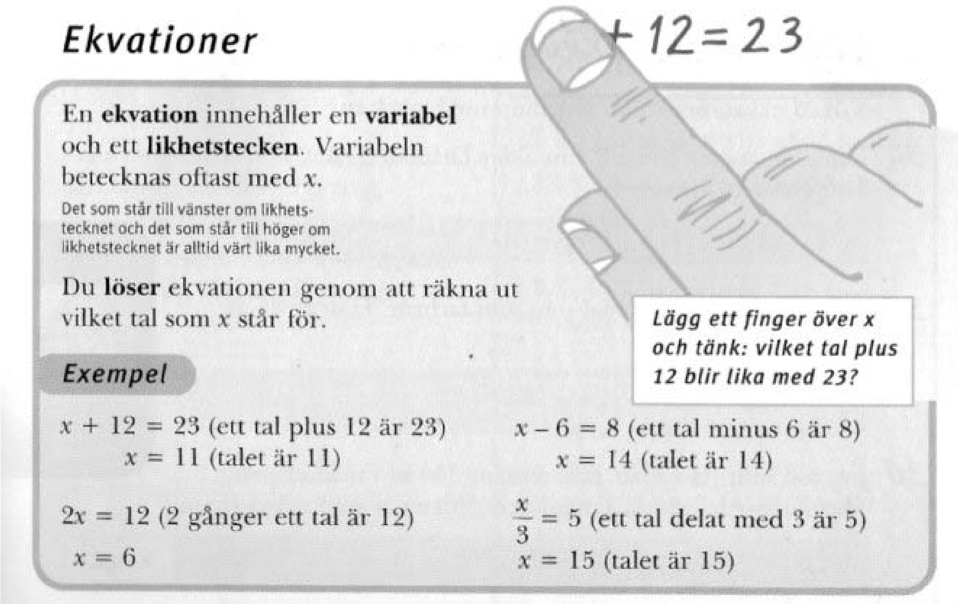


Figur 3: Faktaruta ur Matte Direkt år 7, s175.

Matte Direkt år 7 går redan på nästa sida i boken vidare med uttryck med flera variabler. Faktarutan i Figur 3, visar två rektanglar där måtten med enheten cm är utsatta på den ena, medan den andra rektangeln, som har annan storlek, har bokstäverna *b* respektive *a* utsatta för bredden och höjden. Till denna faktaruta hör tre övningsuppgifter som är delade i totalt åtta deluppgifter. Även här ligger språket på tankenivå 3. Boken kräver också att eleven har uppfattning om, visserligen enkla men dock, geometriska figurer. Geometri är det andra ämnesområde inom grundskolans matematik som inte behandlar siffror och tal i första hand. van Hieles forskning visar klart att elever måste uppnå tankenivå 2 i geometri för att uppfatta parametrar som hör till geometriska figurer. Här har *Matte Direkt år 7* använt ett generellt uttryck för rektangelns omkrets för att visa på ett exempel när vi behöver använda mer än en variabel i ett matematiskt uttryck. Det gör algebran extra svår för elever som inte lyckats ta till sig geometrikursen. Ekströms kursredovisning visar att även i geometri börjar *Matte Direkt* på en abstrakt nivå (Ekström 2000).

Nästa uppslag, s 176-177, är ägnat åt att tolka uttryck. Här finns många flera övningsuppgifter, 10 st, de flesta med deluppgifter, men ingen faktaruta. Låt oss titta på uppgift 19 på sidan 177 som exempel på tolkningsuppgifter: ”Talet eller variablen *a* har värdet 6. Vilket värde får då a) a + 7 b) *a – 4* c) *2a*” Här kan plötsligt för första gången i Matte Direkt år 7 bokstaven *a* vara ett tal eller en variabel. Hur vet vi när *a* är det ena respektive det andra? Om *a* har värdet 6 kan 6 också variera när 6 är en variabel? Tolkning är inte lätt och kräver mycket stöd. Boken ger ett så snyggt och prydligt intryck att man lätt förleds till att tro att den går att använda för självstudier eller att det skulle vara lätt att undervisa i matematik med stödet av en matematikbok. I själva verket går det inte att förstå något alls utan en kunnig lärares ledning i ämnet.

På sidan 178 introduceras ekvationer under rubriken ”Vi räknar ut det hemliga talet”. Faktarutan visar en balansvåg med högar av guldmynt på, varav några finns gömda i en påse. Balansvågen som tankebild för likhetstecknet fungerar ju så länge vi håller oss till guldmynt av samma slag eftersom värdet står i direkt förhållande till vikten. Förstår eleven den finessen? Det skulle ju vara pedagogiskt tilltalande om vi kunde hitta en tankebild som gav en direkt association mellan likhetstecknet och värde snarare än indirekt association mellan likhetstecknet och värde via vikt. En direkt association mellan likhetstecknet och begreppet värde skulle vara en mer långsiktigt hållbar kunskap. Min egen begreppsbild har med byteshandel att göra: likhetstecknet står för värde som man kan byta jämt med.



Ekvationer

+ 12 = 23

En **ekvation** innehåller en **variabel** och ett **likhetstecken**. Variabeln betecknas oftast med *x*.

Det som står till vänster om likhetstecknet och det som står till höger om likhetstecknet är alltid värt lika mycket.

Du **löser** ekvationen genom att räkna ut vilket tal som *x* står för.

Lägg ett finger över x och tänk: vilket tal plus 12 blir lika med 23?

Exempel

$x + 12 = 23$ (ett tal plus 12 är 23)
$x = 11$ (talet är 11)

$x - 6 = 8$ (ett tal minus 6 är 8)
$x = 14$ (talet är 14)

$2x = 12$ (2 gånger ett tal är 12)
$x = 6$

$\frac{x}{3} = 5$ (ett tal delat med 3 är 5)
$x = 15$ (talet är 15)

Figur 4: Faktaruta ur Matte Direkt år 7, s 179.

Faktarutan på sidan 179 som har titeln ”Ekvationer” talar mycket riktigt om lika värde på båda sidorna om ett likhetstecken, dock i liten skrift, se Figur 4. Likhetstecknet är ett av de starkaste tecken vi har i matematik och därmed ett av de viktigaste. För ekvationslösning är förståelse av just likheten själva basen för den fortsatta verksamheten. Varför sätts upplysningen runt likhetstecknet i faktarutan med 6 punkters Arial, dvs extra liten text? Den person som har det minsta svårighet med syn eller läsning kan inte läsa den texten. Ekvationen sådan den presenteras är lätt att lösa: min sju-åring som just kom förbi löste den snabbt innan hon frågade vad det var för något. Och det borde även jag fråga mig: Vad är det för något? Vad står det för? Boken ger en patenentlösning på hur vi mekaniskt löser en ekvation, men är det det som eleverna borde lära sig? Så fort ekvationerna blir krångligare måste eleven ha en god begreppslig förståelse av aritmetiken för att klara sig vidare. Om vi jämför med van Hieles teori finns det mer relevanta stoffet på sidan efter, s 180, ”Talgåtor och ekvationer”. Här finns koppling mellan retorisk framställning och matematisk framställning varur eleven kan få material till att forma tankestrukturer.

Även i den fortsatta framställningen i blå repetitionskurs och röd fördjupningskurs är boken rent teoretisk, eleverna måste kunna föreställa sig att den abstrakta, platta, färgade figuren i boken representerar något konkret i verkligheten. I slutet av grundkursen finns ett algebraspel som en mer konkret uppgift. Boken stimulerar inte till egna undersökningar utan visar enkelt och handfast en procedur hur man gör. Den är bra i så motto att det inte är så mycket kringprat utan boken går alltid rakt på sak.

Med tanke på den långa lista av lärdom som hoppats över redan på första sidan i introduktionen av algebra, avbryter jag vidare analys av *Matte Direkts* framställning för att övergå till att undersöka flera matematikböcker och sedan undersöka hur algebra kan introduceras för elever enligt van Hieles teorier som förberedelse innan matematikbokens uppgifter tar vid.

8.2.2 Analys av Tetra A.

Tetra-serien består av 3 böcker, *Tetra A-C* med en elevbok och en lärarbok i varje del. Strukturen i varje kapitel är upplagd efter modellen: Inledning, Grundkurs, Diagnos följt av plan 1, 2 och 3. Plan 1, 2 och 3 utgör repetitionsuppgifter och fördjupning som görs om behov finns enligt diagnostester som finns inlagda. Kapitlen avslutas med Gruppuppgift och Sammanfattning.

Tetra A börjar algebraavsnittet (s 210-249) med tre färgglada inledningssidor med talgåtor i medeltidsmiljö. Sidan 213 är den första sidan med övningsuppgifter och har titeln ”Algebra—bokstäver betyder tal”. Den börjar med att använda formler i läsuppgifter: eleven ska ersätta en bokstav med ett tal och räkna ut en storhet när bokstaven varierar och sätta in i en tabell. Formeln är I = M * 2,85 där I betyder inkomst och M betyder antal liter mjölk (exemplet är två namngivna mjölkbönder). Man betonar att formeln finns i datorn och att den går att använda utan att förstå. Det finns ingen betoning av likheten i ekvationen, dvs att vänster led har samma värde som höger led. Högerledet är dessutom svårt kognitivt eftersom det förutsätter en begreppsförståelse av multiplikation. Däremot knyter användningen av diagram an till kapitlen innan som är "diagram och statistik". Sättningen i boken kan också förleda en till att misstolka versala I:et för ett gement l.

Det finns en liten faktaruta långt ner på sidan som försöker förklara att om vi inte vet hur många liter mjölk korna mjölkade en viss dag kan vi inte räkna ut inkomsten utan bara ange inkomsten med formeln.

Övningsuppgifterna fortsätter på nästa sida (s214) med fler agrara exempel som handlar om kostnad för staketstolpar och omkretsen runt kohagar. Här i uppgifterna 9007-9008 och 9010-9011 (på sidan 215) tar boken upp det begreppsliga innehållet i multiplikation som upprepad addition (av heltal) vilket är bra. Däremot har man i uppgifterna 9010-9011 använt sig av summor av lika bokstäver. Logiken i uppgifterna är densamma som i *Matte Direkt*, dvs man använder isomorfismen mellan två strukturer. I uttrycket för omkretsen till en hage där man vet hur långa delsträckorna är ska man dra slutsatsen att man kan skriva en generell formel för omkrets med hjälp av en given bokstavskod.

Översikt över studiefältet saknas i *Tetra A*. På samma sätt som i *Matte Direkt* handlar språket i *Tetra A:s* introduktion av algebra om logiska samband som inte kan ses eller upplevas, alltså van Hieles tankenivå 3. Det ger att samma lista på saker som inte togs upp i *Matte direkt* , se tabell 1, gäller även för *Tetra A.*

8.2.3 Analys av Mattestegen C höst.

Mattestegen är ett läromedel för grundskolans år 4-9 där stoffet är indelat i 16 kunskapsnivåer. Läroplanens mål för år 9 motsvarar steg 14. Algebra introduceras bok C Höst som behandlar steg 9-12. Förordet säger uttryckligen att *Mattestegen* är avsedd för att alla elever arbetar individanpassat vilket i boken framställs som att eleverna arbetar på olika ställen i boken. En sådan skrivning ger mig associationer till självstudier. En lärare i en klass med 30 elever kan inte ha någon rimlig chans att hinna med att hjälpa alla på individnivå under en lektion.

Inom avsnittet "Numerisk räkning" s 6-57, t ex på sidan 25, finns ett antal uppgifter där man frågar vilket tal som fattas. Uppgift 25a) $5 + \square = 0$. Här har man infört ekvationslösning fast man inte introducerar bokstavssymboler.

Algebraavsnittet, s 58-125, är indelat i steg 9-12. Inom steg 9 finns avsnitten ”Numeriska uttryck—Räkna med siffror” s 58-63; ”Algebraiska uttryck—Räkna med bokstäver” s 64-68; ”Hur mycket är egentligen 3a kr?” s 69-70; ”Formler” s 71-73. Steg 9 avslutas med ”Sammanfattning” och ”Diagnos”. Ekvationer introduceras först i steg 10.

”Numeriska uttryck” koncentrerar sig på att illustrera begreppen *numeriskt uttryck, värdet av uttrycket*, *större än* och *gånger större än* med hjälp av uppgifter. På sidag 64 börjar avsnittet ”Algebraiska uttryck—Räkna med bokstäver”. Här introduceras bokstäver i matematiken rent mekaniskt genom att stipulera: ”När du räknar med bokstäver kan du inte ’räkna ut svaret’ utan svaret blir ett *algebraiskt uttryck*.” Direkt under finns en faktaruta med texten 3+2*5-4 Det här är ett exemplel på ett numeriskt uttryck a+2*4-b Det här är ett exempel på ett algebraiskt uttryck. Efter tre övningsuppgifter där eleven ska komma fram till att karakteristiskt för algebraiska uttryck är att de alltid innehåller bokstäver och ibland siffror, vilket är van Hieles tankenivå 2, kommer nästa faktaruta som är en uppgift med lösning:

34	Skriv uttrycket för talet. Räkna ut det om det går Vilket tal är		
a)	5 större än 13	b)	5 större än x ?
a)	13 + 5 = 18	b)	x + 5

Här används isomorfismen att den numeriska strukturen ska kunna överföras till den nya algebraiska. Eleven kan förstå att x betyder 13. Att förstå att x+5 är 18 kan troligen eleven förstå på tankenivå 2, men att förstå att x+5 är ett tal kräver insikt om logiska samband vilket ligger i van Hieles tankenivå 3. Övningsuppgifterna som följer använder andra bokstäver som y, x, r och k som symboler för tal. Här ska eleven också förstå att vilken bokstav som helst kan betyda ett tal, vilket borde vara tankenivå 2, men det finns ingen förklaring i den riktningen. Begreppsanvändningen är inte heller konsistent. I avsnittet ”numerisk räkning” introduceras begreppet *gånger större än* men t ex på s 64 uppgift 37b) frågar man i alla fall: Vilket tal är 4 gånger ett tal *x* ?.

Högst upp på sidan 65 kommer nästa ledtråd till isomorfismen att den numeriska strukturen ska kunna överföras till den nya algebraiska: ”När du räknar med boksktäver så räknar du på samma sätt som du gör med siffror. Det ser bara lite annorlunda ut. Eftersom du inte ’räknar ut ett svar’ på samma sätt som du är van vid så kallas det att man *förenklar* uttrycket.” Detta följs av en exempeluppgift med lösning. I de följande uppgifterna ska eleven förenkla uttryck.

Uppgift 42 knyter värde till bokstäver genom att eleven ska räkna antalet x, y och z som är utspridda i en ruta som svar på frågan: Hur mycket finns i rutan?

Sidorna 66-68 ägnas åt att eleven ska formulera algebraiska uttryck från storheter med givna symboler. Eleven får inte själv någon gång i boken välja bokstavssymbol för en verklig storhet utan undervisningen koncentreras på att tolka och använda bokstavsuttryck. De uttryck som används i uppgifterna ligger oftast på van Hieles tankenivå 3.

I avsnittet ”Hur mycket är egentligen 3a kr?” introduceras begreppet *variabel* och samtidigt att man kan räkna ut värdet av ett algebraiskt uttryck. ”När värdet på en bokstav kan variera så kallar man bokstaven för en *variabel*. För att beräkna värdet av ett algebraiskt uttryck så måste man veta vilka tal som bokstäverna står för.” I det här avsnittet ligger tyngdpunkten mycket tydligare på att beräkna algebraiska uttryck. Däremot klargörs inte vad variera betyder, en möjlig tolkning av uppgifterna är att en variabel kan vara ett av två värden. Språket och uppgifterna i avsnittet kräver van Hieles tankenivå 3. Som elev på tankenivå 1 ser man bara en delmängd av vad en matematikkunnig person ser.

Mattestegen C's framställning stämmer bättre med van Hieles tankenivåer än de tidigare analyserade böckerna eftersom den börjar med att introducera begrepp, sedan lära sig känna igen ett algebraiskt uttryck, förstå att man kan räkna med bokstäver, att bokstäver kan betyda tal osv. Däremot är framställningen inte konsistent vad gäller språket vilket är allvarligt om man som van Hiele hävdar att språket är kunskapsbäraren och att språket anger tankenivån. Dessutom hoppar framställningen mellan olika tankenivåer, från 1 till 3 till 2 till 3 osv. Enligt van Hiele måste eleven passera varje nivå i sin helhet innan hon förstår språket på nästa nivå.

8.2.4 Analys av Matematikboken X

Matematikboken X är den första delen i ett läromedel för grundskolans senare del. Varje delavsnitt har en teoridel följt av övningsuppgifter i svårighetsgrader A, B och C. Algebra introduceras i kapitel 2, s 56-88, som är indelat i följande delar

2.1 Multiplikation och division med 10, 100, 1000
2.2 Mer om multiplikation
2.3 Uttryck
TEMA

2.4 Ekavationer—huvudräkning

2.5 Teckna egna ekvationer

Lite av varje

Sammanfattning

Blandade uppgifter

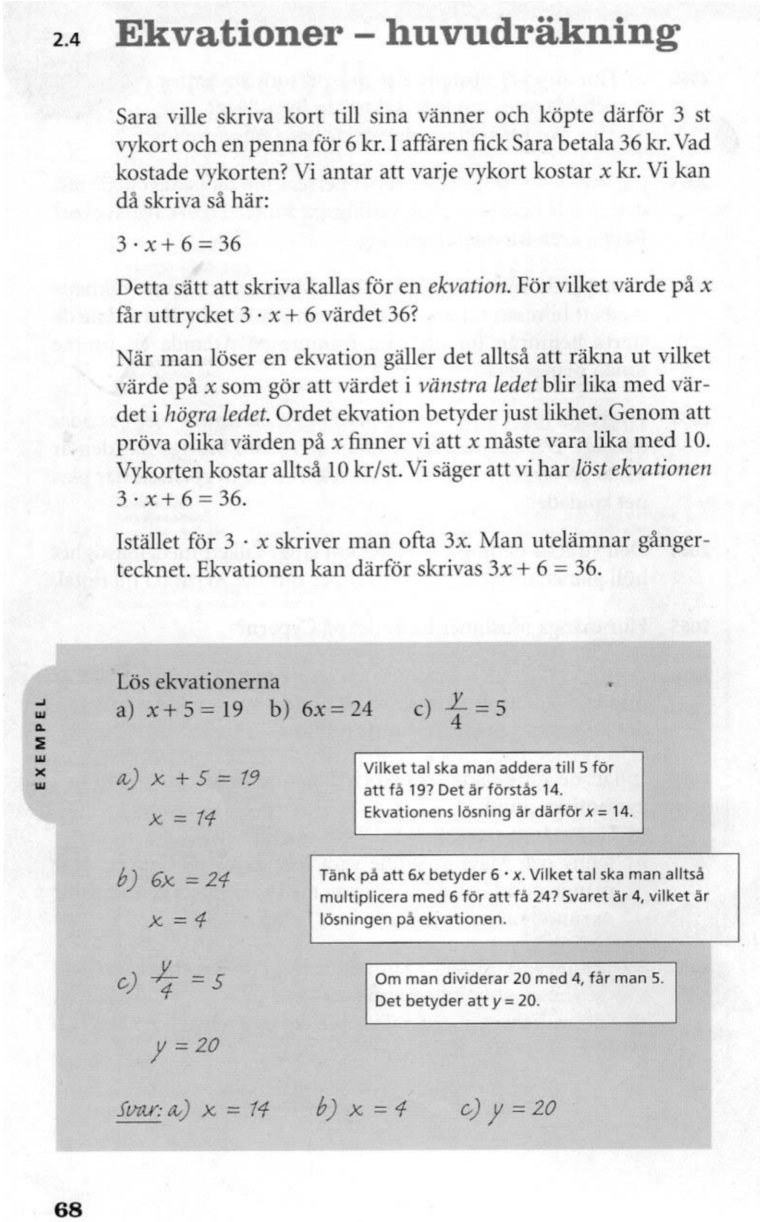
Träna mera

Fördjupning

Träna problemlösning

Det finns ingen översikt över studiefältet, varken över algebra, uttryck eller ekvationer i boken. Ordet algebra nämns över huvud taget inte. Nyckelordet här är 'Ekvationer'. Försättssidan visar fötterna på en lindansare med texten: ”När man dansar på lina måste man kunna balansera. Det är också viktigt att kunna balansera när man löser ekvationer.”

Algebraavsnittet börjar som en fördjupning i multiplikation. Förklaringsmodellen som används riktar sig klart till procedurkunskap: På miniräknaren ser man att decimaltecknet flyttas ett steg åt höger om man multiplicerar ett tal med 10. Bokens framställning ger ingen förståelse då det som egentligen händer är ju att alla siffrorna byter position och därmed värde medan decimaltecknet ligger fast i positionssystemet. I avsnitt 2.2 ”Mer om multiplikation” förs alternativa skrivsätt in för längden av en rad av 2000 gem. Dels kan man mäta varje gem och räkna ut längden i meter, dels kan man räkna ut längden i centimeter och dividera med hundra. När nästa delavsnitt behandlar uttryck hade jag förväntat mig att kunna knyta an till gemexemplet, som är både enkelt, bra och laborativt möjligt, genom att uttrycka längden på gemraden i antal gemlängder, men det används inte alls mer i *Matematik X.* Delavsnittet ”Uttryck” handlar istället om numeriska uttryck med mer än ett räknesätt och prioriteringsregler. Här finns några övningsuppgifter där eleven ska fylla det tal som fattas i en likhet, t ex $4*\square+5=13$. Temauppslaget som följer har blandade uppgifter och ingen direktanknytning till algebra.



2.4 **Ekvationer – huvudräkning**

Sara ville skriva kort till sina vänner och köpte därför 3 st vykort och en penna för 6 kr. I affären fick Sara betala 36 kr. Vad kostade vykorten? Vi antar att varje vykort kostar x kr. Vi kan då skriva så här:

$3 \cdot x + 6 = 36$

Detta sätt att skriva kallas för en *ekvation*. För vilket värde på x får uttrycket $3 \cdot x + 6$ värdet 36?

När man löser en ekvation gäller det alltså att räkna ut vilket värde på x som gör att värdet i *vänstra ledet* blir lika med värdet i *högra ledet*. Ordet ekvation betyder just likhet. Genom att pröva olika värden på x finner vi att x måste vara lika med 10. Vykorten kostar alltså 10 kr/st. Vi säger att vi har *löst ekvationen* $3 \cdot x + 6 = 36$.

Istället för $3 \cdot x$ skriver man ofta $3x$. Man utelämnar gångertecknet. Ekvationen kan därför skrivas $3x + 6 = 36$.

EXEMPEL

Lös ekvationerna

a) $x + 5 = 19$ b) $6x = 24$ c) $\frac{y}{4} = 5$

a) $x + 5 = 19$

$x = 14$

Vilket tal ska man addera till 5 för att få 19? Det är förstås 14. Ekvationens lösning är därför $x = 14$.

b) $6x = 24$

$x = 4$

Tänk på att $6x$ betyder $6 \cdot x$. Vilket tal ska man alltså multiplicera med 6 för att få 24? Svaret är 4, vilket är lösningen på ekvationen.

c) $\frac{y}{4} = 5$

$y = 20$

Om man dividerar 20 med 4, får man 5. Det betyder att $y = 20$.

Svar: a) $x = 14$ b) $x = 4$ c) $y = 20$

68

Figur 5: Matematik X tar upp bokstavssymboler för första gången.

I nästa delavsnitt ”Ekvationer—huvudräkning” dyker första bokstavssymbolen upp i teoridelen där man börjar räkna med ekvationer med detsamma, se figur . Symbolen x introduceras enbart med orden ”Vi antar att varje vykort kostar x kr. Vi kan då skriva så här: 3*x+6=36”. Språket och resonemangen rör logiska samband alltså van Hieles tankenivå 3. Däremot har jag ingen tvekan om att eleverna kan lösa ekvationerna om man täcker för bokstavssymbolerna. Här är alltså tabell 1 inte tillämplig för boken begär inte att eleven ska förstå stoffet, bara lösa ekvationerna. Däremot tas det stoffet inte upp här heller.

8.3 Förslag till kompletterande undervisning

När nu läroböckerna introducerar algebra på van Hieles tankenivå 3 för elever som troligen befinner sig på tankenivå 1, vad behöver då läraren komplettera med för att eleverna ska få en chans att nå upp till tankenivå 3? Hur kan man arbeta med algebra?

Både geometri och algebra har gemensamt att det är matematik som inte handlar om siffror och tal i första hand. Vi använder aritmetiken men först efter att andra logiska element, överväganden och operationer har bildat grund. God aritmetisk begreppsförståelse är däremot ett förkunskapskrav till algebra. Det räcker t ex inte med att kunna multiplicera, eleven måste också ha förstått vad multiplikation är. Algebra förekommer inte igenkänningsbart för skolelever i deras vardagsliv. Snarare är algebra ett sätt se världen som bygger på en gemensam vetenskaplig konvention. När vi betraktar vår omgivning genom ett filter, t ex begreppet röd, blir vi medvetna om och ser allt rött i vår omgivning. Ser vi samma omgivning filtrerat genom begreppet rund, upptäcker vi andra saker än de vi såg när vi tänkte på röda saker. Här handlar det alltså om att lära eleverna att se sitt vardagsliv i algebraiska termer.

8.3.1 Översikt över studiefältet algebra

Hur skulle då en översikt över algebra som studiefält kunna se ut? Den kunde belysa algebrans historia, ordens etymologi, vad algebra används till idag, gränser till andra matematikområden, dvs vad är inte algebra samt förkunskaper som krävs.

8.3.2 Tankenivå 1

När eleven befinner sig på tankenivå 1 ska hon enligt van Hiele börja sin utforskning av området med att ta till sig relevant information som sedan bearbetas i stryd orientering. Då inställer sig frågan: Vad är relevant information?

De svenska orden siffra och chiffer har samma ursprung, dvs arabiskans ord för noll, as-sifr som uttalas [*as sefyr*] (jämför med västanvinden i grekisk romersk mytologi) (Thompson 1991:591). Den etymologiska härledningen är ett sätt att göra det troligt att man kan räkna med bokstäver i matematik. Det har också fördelen med att ge associationer till koder och symboler, då chiffer ju är kodad text. Speciellt om man utgår från retorisk algebra får detta en bra koppling. I den retoriska algebran uttrycks hela resonemanget med ord, även siffror skrivs som ord. Det är bra träning i logiskt tänkande för eleverna att få beskriva matematiska samband med ord. Det knyter an till verkligheten och många resonemang runt när samband gäller, blir möjliga även för svaga elever. Dessutom blir det både en lättnad och aha-upplevelse när eleverna själva begär att få översätta den retoriska algebran till symbolalgebra, då det blir för tröttsamt och oöverskådligt att skriva matematiken i ord. I en Waldorfskola spenderade man 30 lektionstimmar på det här stadiet innan den retoriska algebran ersattes av symbolalgebra (Intervju).

Nyckeln är att eleverna själva måste sätta upp matematiska samband, dvs de måste själva se sin omgivning, tolka den i matematiska termer och skriva ner uttrycken retoriskt. Genom att eleverna sedan själva får välja symbol (kod) för det de beskrivit i ord fås en förståelse för vad symbolen står för. Dessutom kan de då inse att det är viktigt att välja symboler som inte kan förväxlas med exempelvis enhet, t ex inte välja symbolen *m* för en sträcka som har enheten meter.

Exemel på arbetssätt inom tankenivå 1:

Låt eleverna arbeta i grupper med uppgift att t ex på skolgården beskriva ett antal befintliga saker med retorisk algebra. De får rita av situationen, markera de sträckor eller ytor de använder samt skriva ner sambanden med ord. Även enheter bör finnas med i resonemanget. Exempel på saker som kan användas är

- längder på staket uttryckt i antal staketlängder mellan två stolpar
- totala ytan av en uppritad hage uttryckt i antal rutor
- omkretsen av en uppritad hage uttryckt i antal sidolängder på en ruta
- totala längden på en sittbänk uttryckt i antal mjölkpakets längd
- bredden på ett fönster uttryckt i längden på tummens ytterled
- husets bredd uttryckt i antal fotlängder
- ytan på en plattläggning uttryckt i antal av en plattas yta
- volymen i en hink uttryckt i spadar sand
- volymen i en hink uttryckt i koppar vatten
- längden av hopsatta gem uttryckt i antal gemlängder

I rent retorisk algebra ska även siffror skrivas med bokstäver. Senare i klassrummet kan eleverna få koda om, dvs byta ut, alla sifferord till siffror. Det är också en upplevelse av att även siffror är en sorts koder. Ytterligare nästa steg är att koda om referensuttrycken, t ex ersätta 'mjölkpaketets längd' med en bokstavskod som eleverna får välja fritt.

8.3.3 Tankenivå 2

På tankenivå 2 arbetar eleverna med att förstå begrepp som variera, variabel, förstå vad symbolerna betyder i olika uttryck.

Även mellanformer mellan retorisk algebra och ren symbolalgebra ger elever upplevelser runt hur man hanterar begrepp i matematik, t ex att blanda verbala uttryck med siffror och matematiska tecken såsom likhetstecknet. Ett sådant skrivsätt ger också associationer till att det går att räkna med nedskrivna verbala uttryck på samma sätt som med siffersymboler.

Exempel på arbetssätt från intervju med en lärare verksam i en Waldorfskola i Östergötland (Intervju):

Läraren talar om för eleverna att tex vaktmästaren, som är ung och frisk, är 25 år. Läraren själv är 50 år. Läraren låter eleverna föreslå hur vi kan beskriva samband mellan dem.

Eleverna:	Lärarens ålder = vaktmästarens dubbla ålder
Läraren:	Skriv det på något mer sätt!
Eleverna	Lärarens ålder = 2 * vaktmästarens ålder
Läraren:	Skriv sambandet på något mer sätt!
Eleverna	Lärarens ålder = vaktmästarens ålder + vaktmästarens ålder
Läraren:	Skriv sambandet på något mer sätt!
Eleverna	Lärarens ålder - vaktmästarens ålder = vaktmästarens ålder
Läraren:	Skriv det på något mer sätt!
Eleverna	Lärarens ålder / vaktmästarens ålder = 2
Läraren:	Ser ni något samband mellan de olika sätten att skriva?

Eleverna kommer efter diskussion fram till att alla uttrycken beskriver samma sak på olika sätt.

Läraren:	Gäller de här sambanden alltid?
Eleverna:	Nej inte innan vaktmästaren blev född!
Läraren:	Gäller de alltid efter vaktmästarens födelse?

Eleverna: Ja! Jo! Nej... Inte efter din (lärarens) död.

Läraren OK. Gäller det alltid mellan vakmästarens födelse och min död, då?

Eleverna Ja!

Läraren Men jag fyller år 5 maj!

Eleverna Oj då gäller det ju inte efter 5 maj! När fyller vaktmästaren?

Diskussionen fortsätter runt vad som är tillfälliga samband och vad som är permanenta samband och vad som är formler.

I det ovanstående exemplet finns flera element som kan knytas till van Hieles teorier. Dels handlar det om att utgå från något verkligt som eleverna har en direkt relation till. Dels får eleverna själva i diskussionsform undersöka studiefältet. De får själva konstruera samma matematiska samband i olika former. Läraren tvingar inte på eleverna sina strukturer, utan eleverna måste själva upptäcka vilka karakteristika som gäller för just de matematiska samband som diskuteras. Däremot är undersökningen styrd. Den kan alltså hänföras till van Hieles period 2, fas 2-3, se avsnitt 4.4.

En annan aspekt av det ovanstående exemplet är att eleverna får sätta ord på det de ser eller uppfattar. Just kopplingen verklighet—retorisk framställning—matematisk framställning är viktig för förståelsen av matematik. Enligt van Hiele är det orden som är kunskapsbärare: det är orden som ordnas i strukturer och kopplas till upplevelser, bilder och begrepp. En möjlig tolkning av van Hieles teori kan då bli att matematikundervisning utan diskussion och utan retorisk framställning skulle vara dömd att misslyckas!

Här kan vi också fundera över den metvetna intentionens roll i lärandet. Gör det någon skillnad om eleven har förförståelsen att matematik handlar enbart om siffror, jämfört med tex uppfattningen att matematik handlar om logiska resonemang? Jag tror att det har en avgörande betydelse för elevens möjligheter att lära sig matematik. Om eleven tror att matematik handlar enbart om siffror strävar eleven rimligtvis inte efter att bemästra logiska resonemang. Istället strävar hon efter att bemästra sifferhantverket. Med en sådan inställning skulle det alltså bli svårare att uppnå van Hieles nivå 3, abstraktion.

9 Avslutande reflektioner

Van Hieles teorier anser jag fungerar väl som instrument för att klarlägga lärobokens roll i matematikundervisningen. De utgör dessutom ett praktiskt användbart redskap i form av tankestrukturer för läraren till att både planera sin undervisning och utvärdera elevresultaten. Sambandet mellan lärostoff, undervisningens mål, elevens nivå och vad man gör i undervisningen blir logiskt och överskådligt med hjälp av van Hieles teorier.

Som lärare är det av yttersta vikt att få fungerande redskap för att kunna utvärdera de läroböcker som erbjuds. Det går inte att se om en lärobok är bra eller dålig utan någon form av teoretiskt filter att analysera emot. Van Hieles teorier anser jag fungerar bra som ett sådant filter. Som matematiskt kunnig tyckte jag innan jag gjort den här analysen att läroböckerna började på en basal nivå och såg snyggt strukturerade ut. Jag kunde alltså inte riktigt föreställa mig vad som är svårt för eleven. Efter att ha analyserat läroböcker med van Hieles teorier som filter får jag en helt annan bild.

Alla de matematikböcker som jag undersökt ger ett förföriskt intryck av välordnat självstudiematerial och som sådant alltså skulle borga för god matematikundervisning även av en matematiskt okunnig lärare. Undersökningen för algebra visar att ingenting kunde vara mer felaktigt. Läroböckernas framställning börjar generellt på van Hieles tankenivå 3 för algebra, vilket är en alldeles för hög teoretisk nivå för nybörjaren i algebra. Liknande resultat har Ekström kommit fram till för geometri (Ekström 2000). Undervisning är lärarens uppgift, matematikboken får inte definiera matematikundervisningen.

En fråga som uppkommit under den här undersökningen är huruvida dyskalkyli och allmänna matematiksvårigheter kan ha samband med att vi inte undervisar på van Hieles tankenivå 1 och 2 och de brister i begreppslig förståelse som det orsakar. Det skulle vara mycket intressant att se en utredning om det.

Matematikböckerna jag undersökt tar inte hänsyn till van Hieles teorier, varken tankenivåerna eller faserna i lärarens och elevernas arbete att nå nästa nivå eller översikt över studiefältet. Om de gjorde det skulle de generellt inte börja på tankenivå 3, inte hoppa mellan nivåer och kontrollen av logiken i användningen av språket runt begrepp vara tydligare.

Språket och orden är kunskapsbärare även i matematik. Vanliga ord används annorlunda i matematik än i vanligt språkbruk. Det krävs mycket arbete och ledning för att eleven ska kunna förstå det matematiska språket. Termerna i sig talar inte om vad de handlar om, utan det är exemplen på hur de används som skapar det begreppsliga innehållet. En viktig faktor i den inlärningen är att få beskriva verkligheten retoriskt matematiskt och sedan koda om texten till matematiska symboler. För att använda en vanlig matematikbok krävs att eleven har kunskap i hur man analyserar text ur matematisk synpunkt vilket är en kunskap som lätt förbises.

Van Hieles teorier pekar på att varje elev måste själv undersöka studieområdet för att skapa de strukturer som gör att nästa tankenivå uppnås. Det pekar i sin tur mot ett experimentellt arbetssätt som jag inte hittar något stöd för i läroböckerna. Van Hiele säger också att när verklig problemlösning blir meningsfull för eleven, har eleven nästan kommit upp på nästa tankenivå. Det skulle kunna tas som intäkt för att använda matematikboken som exempelsamling för att öva upp räknefärdigheten, sifferhantverket, när väl förståelsen av den matematiska logiken väl är undersökt och förstådd. Att designa det program som leder eleverna mot förståelse av det matematiska språket och den matematiska logiken blir i det perspektivet lärarens uppgift att göra utan stöd av matematikböcker. Detta kräver naturligtvis kunniga lärare som kan sitt ämne väl, är didaktiskt kunniga och dessutom besitter en god portion fantasirikedom.

Den kommunala skolan verkar ha en tradition av att prioritera teoretisk kunskap framför praktisk. Van Hieles teorier stämmer dåligt ihop med den traditionen. Då ligger Freinet- och Waldorf-pedagogik närmare van Hieles teorier. Freinetpedagogiken kallas också arbetets pedagogik. Freinet ansåg att det normala tillståndet för barn var inte lek utan arbete, och teori och praktiskt arbete värderas där lika. En av Freinetpedagogikens fem hörnstenar kallas på franska ’Tâtonnement experimental’ som betyder ungefär ’trevande experimenterande’ och leder direkt mot ett experimenterande arbetssätt (FIMEM). Waldorfpedagogiken använder sig också av ett experimenterande arbetssätt som ligger närmare van Hieles teorier än en rent teoretisk tradition. Bengt Ulin har beskrivit matematikundervisningen i Waldorfpedagogiken i sin bok *Att finna ett spår* (Ulin 1983).

Jag är övertygad om att matematikundervisningen kan förbättras genom att tillämpa van Hieles teorier i matematikundervisningen. Det skulle ge en mer varierad matematikundervisning som var mer anpassad till elevens sätt att tänka. Hur det kan se ut och hur fortsättningen kan utformas för effektiv progression mellan tankenivåerna och inte minst en ordentlig utredning om definition av områden där man behöver börja från början i van Hieles tankenivåer vore mycket intressant att se vidare forskning om.

För att återknyta till Finland som förebild vad gäller matematikundervisning, skulle det vara intressant att se hur finska matematikböcker presenterar algebra. Tar de hänsyn till van Hieles teorier? En annan intressant fråga är hur matematikundervisningen i Finland går till. Enligt Lisen Häggblom framstår den inte alls lika läroboksbunden som i Sverige. Hur det än står till med den saken så hoppas jag att denna uppsats kan inspirera någon till att hitta matematik i vardagen och våga ta upp aspekter av matematiken som går utöver de rent mekaniskt beräkningsmässiga!

10 Källor

Intervju: Telefonintervju med Caroline Ekström verksam vid Björkö Friskola, Waldorfskola i Östergötland (2005-04-25).

Matematikboken X: Undvall, Olofsson, Forsberg (2001) *Matematikboken X.* Almqvist & Wiksell, Liber AB, Stockholm.

Matte3000 AB: Björk, Brolin (2000) *Matematik 3000*. Kurs A och B för naturvetenskapliga och tekniska programmet. Bokförlaget Natur och Kultur, Stockholm.

Matte år 4A: Andersson, Picetti, Sundin (2003) *Matte Direkt Borgen 4A.* Bonnier Utbildning, Stockholm.

Matte år 5A: Andersson, Picetti (2004) *Matte Direkt Borgen 5A.* Bonnier Utbildning, Stockholm.

Matte år 6A: Carlsson, Liljegren, Picetti (2004) *Matte Direkt Borgen 6A.* Bonnier Utbildning, Stockholm.

Matte år 7: Carlsson, Hake, Öberg (2001) *Matte Direkt år 7.* Bonnier Utbildning, Stockholm.

Matte år 8: Carlsson, Hake, Öberg (2002) *Matte Direkt år 8.* Bonnier Utbildning, Stockholm.

Matte år 9: Carlsson, Hake, Öberg (2003) *Matte Direkt år 9.* Bonnier Utbildning, Stockholm.

Mattestegen C: Andrén, Lind, Åström (2002) *Mattestegen C Höst.* Natur och Kultur, Stockholm.

Megamatematik 7: Alvin, Anderberg, Karlsson, Landtblom (1992) *Megamatematik. Lärobok år 7.* Ekelunds förlag, Solna.

Tetra A: Carlsson, Ingves, Öhman (1998) *Tetra A.* Gleerups förlag, Malmö.

11 Litteraturförteckning

Bratt, Bengt; Wyndham, Jan (1996) *Språket vår mentala tumme* ur Nämnaren Tema *Matematik—ett kommunikationsämne.* Nationellt Centrum för matematikundervisning, Göteborg.

Bremler, Niklas (2003): *Matteboken som redskap och aktör – en studie av hur derivata introduceras i svenska läroböcker 1967-2002 [The mathematics book as tool and actor – a study of how derivatives are introduced in Swedish textbooks 1967-2002].* Lärarhögskolan, Stockholm.

Brändström, Anna (2005): *Differentiated tasks in mathematics textbooks : an analysis of the levels of difficult.y* Luleå tekniska universitet, Luleå. http://epubl.ltu.se/1402-1757/2005/18/index.html.

Grinstein, Louise och Lipsey, Sally (2001): *Encyclopedia of Mathematics Education*. Falmer Press. ISBN 0811531647X. http://www.amazon.com.

Carlgren, Ingrid och Marton, Ference (2003): *Lärare av i morgon*. Lärarförbundet, Stockholm.

Ekström, Caroline (2000) *Didaktik i geometriundervisningen. Kursrapport i Euklidisk geometri våren 2000.* Linköping.

FIMEM, Fédération Internationale des Mouvements d'Ecole Moderne (Internationella Freinetorganisationen): *Pédagogie Freinet* http://www.freinet.org.

Fuys, David och Geddes, Dorothy (1984): *An investigation of Van Hiele Levels of Thinking in Geometry among Sixth and Ninth Graders: Research Findings and Implications.* Paper presented at the68th Annual Meeting of the American Educational Research Association 27 April 1984.

Marton, Ference och Booth, Shirley (2000): *Om lärande*. Studentlitteratur, Lund.

Hedrén, Rolf (1992): ”Van Hiele-nivåer och deras betydelse för geometriundervisningen” ur Emmanuelsson, Johansson, Ryding (red.) *Geometri och Statistik*. Studentlitteratur, Lund.

Häggblom, Lisen (2005): *Räkna med finsk matte.* Artikel i Svenska Dagbladet 2005-02-12.

Johansson, Monica (2003): *Textbooks in mathematics education: a study of textbooks as the potentially implemented curriculum.* Luleå Tekniska Universitet.

Klewborn, Elisabeth (1992): *Matematik genom tre stadier. Ett helhetsperspektiv på matematiken i grundskolan.* C-uppsats, Lärarhögskolan i Malmö, Lunds Universitet.

Kullberg, Birgitta (2004): *Lust- och undervisningsbaserat lärande – ett teoribygge*: Studentlitteratur, Lund.

Källgren, Gunnel (1979): *Innehåll i text. En genomgång av faktorer av betydelse för texters innehåll, uppbyggnad och sammanhang.* Studentlitteratur, Lund.

Magne, O (1990): *Medelsta-matematik. Hur väl behörskar grundkolans elever lärostoffet enligt Lgr 69 och Lgr 80?* Pedagogisk-psykologiska problem, Rapport nr 539, Institutionen för pedagogik och specialmetodik, Lärarhögskolan i Malmö, Lunds Universitet.

Mistretta, Regina M (2002): *Enhancing Geometric Reasoning.* Adolescence; v35 n138 p365-79

Nyström, Peter (1998): *Bedömning av kvalitet i matematikkunskaper. En jämförelse mellan Skolverkets betygskriterier, SOLO-taxonomin och van Hieles nivåer av tänkande.* PM nr 141, Umeå Universitets publikationer. http://www.umu.se.

Nämnaren Tema (1997): *Algebra för alla.* Nationellt Centrum för matematikundervisning, Göteborg.

Pegg, John (2002): *Fundamental cycles of cognitive growth.* ur Proceedings of the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (26th, Norwich, England, July 21-26, 2002.

Persson, Per-Eskil (2005): *Bokstavliga svårigheter : faktorer som påverkar gymnasieelevers algebralärande*. Luleå tekniska universitet, Luleå. http://epubl.ltu.se/1402-1757/2005/09/index.html

Rudolph, William B; Kane, Robert B (1970) *Estimates of the Relative Sequential Constraint for Selected Passages from Mathematics Books and the Relationship of These Measures to Reading Comprehension.* Paper presented at the conference of the American Educational Research Association, Minneapolis, Minn., Mar. 2-6, 1970

Sahlin, Birgitta (1997). *Matematisksvårigheter och svårigheter när det gäller koncentration i grundskolan.* En översikt av svensk forskning 1990-1995. Stockholm: Statens skolverk: Liber distribution.

Strässer, Rudolf (2005): *Overview of research on teaching and learning mathematics.* Vetenskapsrådet, Stockholm.

Swafford, Jane O; And Others (1997): *Increased Knowledge in Geometry and Instructional Practice.* Journal for Research in Mathematics Education; v28 n4 p467-83 Jul 1997

Thompson, Jan (1991): *Historiens Matematik*. Studentlitteratur, Lund.

Thornton, Steve (1998): *Constructing Geometric Reasoning.* Australian Mathematics Teacher; v54 n3 p6-11 Aug 1998

Van Hiele, Pierre (1986): *Structure and Insight. A Theory of Mathematics education*. London: Academic Press, Inc.

Ulin, Bengt (1983): *Att finna ett spår. Motiv och metoder i matematikundervisningen – erfarenheter ur waldorfpedagogiken.* Skolöverstyrelsen, Stockholm. Robygge Bokhandel, Järna.

Whitman, Nancy C; Nohda, Nobuhiko; Lai, Morris K; Hashimoto, Yoshihiro; Iijima, Yasuyuki; Isoda, Masami; Hoffer, Alan (1997): *Mathematics Education: A Cross-Cultural Study.* Peabody Journal of Education; v72 n1 p215-32 1997

Österholm, Magnus (2004): *Läsa matematiska texter : förståelse och lärande i läsprocessen.* Universitetet i Linköping. http://www.ep.liu.se/lic/science_technology/11/34/digest.pdf

12 Förteckning över figurer och tabeller

Figurer:

Tabeller:

13 Bilaga 1: Citat

Citat från (van Hiele 1986:46):

> Pupils are asked to prove that the three bisectors of the angles of a triangle have one point in common. A pupil at the [fourth] level of thinking can give proof as follows:
>
> The statement: ”a point equidistant to the sides *a* and *b* of triangle *ABC*” is equivalent to the statement ”the point is situated on the bisector of the angle *C*.”
>
> Since this statement is sufficient and necessary, it follows that the intersection of the bisectors of the angles *B* and *C* is equidistant to the sides *a, b*, and *c*. (So now we are sure of the existence of a point inside a triangle equidistant of the three sides.) This intersection point is called *I*.
>
> Since *I* is equidistant to the sides *b* and *c*, it follows that *I* is necessarily situated on the bisector of angle *A*.
>
> *I* was defined as the intersection point of the bisectors of the angles *B* and *C*. So the three bisectors have a point *I* in common.
>
> In the reduced form the proof can be given as follows:
>
> A point is chosen on a bisector of an angle. With the help of congruence of triangles it can be proved that the distances of this point to the meeting lines are equal. Now draw an arbitrary triangle *ABC*. Look at the intersection of the bisectors of the angles *B* and *C*. Prove that this point is equidistant to the three sides of the triangle.
>
> Now call the intersection point the bisectors *I*. We have already seen that the distances of this point to the sides *AB* and *AC* are equal. Now prove with the help of congruence that *AI* bisects angle *A*. *AI, BI*, and *CI*, being the bisectors of the angles of a triangle, we now know all have one point in common.
>
> Mathematically the second proof does not differ from the first. But the language of the second proof is much easier for a pupil than that of the first. In the fist poof, you will have to exert yourself more in order to get to the bottom of it. In the second proof, every step can be easily traced. Perhaps the pupil will make a mistake when proving the last congruence because hi is distracted by the fist congruence apparently being the same. But even if everything proceeded without difficulty, he, at the end, will be astonished that the proof is now finished: He has carried out the steps without understanding their meaning, the whole remained mysterious to him, the proof is a mousetrap.
>
> A teacher who has to explain a poof of the first kind must take care not to make of it a proof of the second kind. His explanation must be focused on the points ‘necessary and sufficient,’ on the fact that in the first part of the proof the existence of appoint equidistant to all three sides has been proved.

Citat från (van Hiele 1986:62-63):

> I must emphasize especially that the learning of an orientation in the first period [van Hieles term för läroperioden mellan tankenivå 1 och 2. Ibid.] and also later in the higher periods is a process that has to be done by the pupils themselves. The pupils have the intention to orient themselves, they have the need for mobility in the field of thinking, therefore *they* begin to compare the symbols; by *their* reflections the symbols get the character of a signal. The teacher can give guidance to the process of learning, for example, by giving the pupils the opportunity to discuss their orientations and by having them find their way in the field of thinking. But this guidance does not imply that the signals in the field of thinking of the pupils should come from the teacher's knowledge. It is not the teacher's task to have them learn which properties belong to given figures and how to act in a given situation. If the teacher attempts this, many of the pupils will have a network of relations at their disposal that is not sufficiently connected with the original global field of thinking. Such pupils, starting from a given concrete situation, will have difficulties returning to the corresponding signification in the developed network of relations. They will not succeed unless the concrete situation happens to be that of the teacher's original instruction.