

Matematiska begrepp som förekommer i geometriundervisningen för årskurs 4 och 6

**En kvalitativ studie kring lärares och elevers
uttrycksformer**

Av: Emelie Makdisi

Handledare: Natalia Karlsson
Södertörns högskola | Institutionen för kultur och lärande
Kandidat/Magisteruppsats 15 hp
Matematik | 7 terminen 2019
Grundlärarutbildning med interkulturell profil åk 4-6



Abstract

Title: Mathematical concepts that occur in geometry education for grades 4 and 6

Author name: Emelie Makdisi

Supervisor name: Natalia Karlsson

Term: 7

The purpose of the study is to investigate how teachers for grades 4 and 6 introduce geometric concepts based on Van Hiele's levels for understanding geometry. The purpose of the study is also to investigate pupils' use of geometric concepts in conversations based on central concepts in geometry teaching. The purpose is broken down with the following issues:

- Which of Van Hiele's levels can be identified when introducing geometric concepts?
- How do pupils use geometric concepts in conversations during the introduction?

These are explored through observations that are supplemented with interviews. The data collection will be based on an interview guide and an observation schedule. This study is based on the theories of Van Hiele's different levels of understanding geometry and central geometric concepts in teaching. There will also be Vygotsky's sociocultural perspective regarding the nearest development zone for possible dialogue between scientific- and everyday concepts. The result shows that teacher 1 uses visualization, while teacher 2 and 3 use visualization and analysis to introduce geometric concepts to the pupils.

Teacher 1 uses images and explanations and combines these with concrete material, while teacher 2 and 3 use laboratory exercises to promote pupils' analytical skills. The mathematical language is linked to the pupils' well-known phenomenon in the teaching of teacher 2 and 3, but not teacher 1. It shows that the teaching of geometry of teacher 2 and 3 is permeated by linguistic support to reach the interaction and to understand the meaning of the geometric concepts.

Keywords: Geometry teaching, geometric concepts, ability concepts and mathematical language

Nyckelord: Geometriundervisning, geometriska begrepp, begrepps förmåga och matematiska språket

Innehållsförteckning

1. Inledning	1
1.1 Syfte & frågeställningar	2
2. Bakgrund	3
2.1 Analysera mer i geometri	3
2.2 Geometris historia	3
2.3 Definitionen av geometri	4
2.4 Lärares syn på geometriundervisningen	4
2.5 Centrala begrepp	4
3. Teoretiska utgångspunkter	6
3.1 Van Hieles	6
3.2 Geometriska begrepp i undervisningen	6
3.3 Vygotskijs sociokulturella teori och lärande i matematik	8
3.4 Sammanfattning av teoretiska utgångspunkter	8
4. Tidigare forskning	9
4.1 Metakognitiva strategier	9
4.2 Det matematiska språket	9
4.3 Van Hieles undervisningsstrategi	10
5. Metod och material	12
5.1 Studiens metoder	12
5.2 Observation	12
5.3 Intervju	13
5.4 Genomförande	14
5.5 Urval	15
5.6 Forskningsetiska principer	15
6. Resultat och analys	17
6.1 Vilka av Van Hieles nivåer går att identifiera vid introducering av geometriska begrepp	17
<i>Observationer</i>	17
<i>Intervjuer</i>	19
Analys	21
6.2 Hur använder eleverna geometriska begrepp i samtal vid introduktionen	22
<i>Observationer</i>	22
<i>Intervjuer</i>	23
Analys	24
7. Diskussion	27
7.1 Metoddiskussion	27
7.2 Resultatdiskussion	27
7.2.1 Vilka av Van Hieles nivåer går att identifiera vid introducering av geometriska begrepp	27
7.2.2 Hur använder eleverna geometriska begrepp i samtal vid introduktionen	29
7.3 Didaktiska implikationer	30
7.4 Slutsats	31
7.5 Vidare forskning	31

Käll- och litteraturförteckning.....	32
Bilagor.....	35
Bilaga 1 Observationsschema	35
Bilaga 2 Intervjuguide	37
Bilaga 3 Geometriska objekt.....	38

1. Inledning

TIMSS som står för Trends In Mathematics and Science Study är tillsammans med PISA den största internationella kunskapsmätningen. Denna undersökning utförs vart fjärde år. Studien undersöker attityder och kunskaper om ämnet matematik och naturvetenskap hos elever i årskurs 4 och 8 (Skolverket 2011). TIMSS 2011 presenterar resultatet i matematik utifrån innehållsliga och kognitiva områden för olika arbetsområden i matematik. Jag har valt att fokusera på arbetsområdet geometri. I årskurs 4 har svenska elever ökat Sveriges genomsnittliga resultat genom att de presterar bättre inom detta arbetsområde. I årskurs 8 har svenska elever presterat sämst inom arbetsområdet geometri. TIMSS 2011 presenterar även resultat kring elevers starkaste kognitiva områden. Dessa tre kognitiva områden är *veta*, *tillämpa* och *resonera*. Jag har valt att fokusera på *veta* eftersom det testar elevernas fakta- och begreppskunskap. I årskurs 4 och 8 är svenska eleverna svagast i fakta- och begreppskunskap (TIMSS 2015, s. 32-34).

Det blir därför betydelsefullt i denna studie att undersöka hur matematiklärare arbetar med geometriska begrepp i årskurs 4 och 6. Jag anser att det är viktigt att undersöka för att internationell statistik visar att elevers attityder och kunskaper till geometri är bristfällig. Statistiken visar att elever i årskurs 4 och 8 är svagast i fakta- och begreppskunskap i geometri. Det blir väsentligt att undersöka hur lärare arbetar med att introducera geometriska begrepp och utforska elevernas användning av geometriska begrepp i samtal. Studien utgår ifrån ett lärarperspektiv för att kunna klargöra hur just dessa lärare arbetar samt ett elevperspektiv för att kunna se hur eleverna använder geometriska begrepp i samtal.

Det är viktigt att matematikundervisningen bidrar till att eleverna ges förutsättningar att utveckla förtrogenhet med grundläggande matematiska begrepp och metoder samt deras användbarhet (Skolverket, Lgr 11, s. 54). I kommentarmaterialet skrivs det att förtrogenheten utvecklas med erfarenheter därför behöver undervisningen ge eleverna erfarenheter kring begrepp och metoder. Eleverna ska ges möjligheten att använda och analysera matematiska begrepp och samband samt förstå relationerna mellan olika begrepp. Elevernas förståelse för matematiska begrepp fördjupas när de får använda olika uttrycksformer (Skolverket, kommentarmaterial, s. 7-8). Löwing (2011) anser att det är viktigt att geometriundervisningen syftar till att ge eleverna förutsättningar att utveckla kunskaper om geometriska begrepp och dess egenskaper som varje geometrisk figur/objekt har (Löwing 2011).

1.1 Syfte & frågeställningar

Syftet med studien är att undersöka hur lärare för årskurs 4 och 6 introducerar geometriska begrepp utifrån Van Hieles nivåer för att förstå geometri. Studiens syfte är även att undersöka elevernas användning av geometriska begrepp i samtal utifrån centrala begrepp i geometriundervisningen. Syftet bryts ned med följande frågeställningar:

- Vilka av Van Hieles nivåer går att identifiera vid introducering av geometriska begrepp?
- Hur använder eleverna geometriska begrepp i samtal vid introduktionen?

2. Bakgrund

Detta avsnitt presenterar en bakgrund kring vissa nivåer av Van Hieles teori, geometrins historiska rötter och definitionen av geometri. Avsnittet kommer även att genomsyras av lärares syn på geometriundervisningen och centrala begrepp i geometriundervisningen.

2.1 Analysera mer i geometri

Holmberg (2011) har undersökt geometriundervisning lite närmare. Holmberg undersökte hur lärare undervisar i geometri och jämför det med forskarnas uppfattning om geometriundervisning. Holmberg kommer fram till att läromedlen innehåller uppgifter som beräkningsprocedurer och ett fåtal med egna undersökningar. Använder läraren läromedel som undervisningsmaterial blir det inte många tillfällen för eleverna att undersöka och få egna erfarenheter. Holmberg utgår ifrån Van Hieles teori för undervisningen och konstaterar att arbetet med nivån 1 är att eleverna lär sig känna igen olika geometriska objekt och därefter hoppar lärarna till nivå 3 för att utföra beräkningar och arbeta på en abstrakt nivå.

Holmberg förklarar att nivå 2 handlar om att analysera. Här ska eleverna analysera egenskaper hos geometriska objekt genom att vika papper, mäta, rita på rutat papper eller använda geobräde. Holmberg påpekar att nivå 2 har lärarna hoppat över och inser att eleverna har problem med begrepp och att utföra beräkningar. Holmberg menar att dessa svårigheter kan bero på att lärarna inte låter eleverna arbeta med att analysera de geometriska objektens egenskaper. Forskning visar att eleverna behöver mer tid till en mer undersökande verksamhet, med andra ord nivå 2 i Van Hieles teori. Holmberg kommer fram till att fler laborationer med samtal och analyser kan öka elevens kunskaper i geometri. Genom att använda Van Hieles nivå 2 i geometriundervisningen, ger vi eleverna en möjlighet att undersöka och analysera mer vilket leder till ökad möjlighet att förstå geometri (Holmberg 2011).

2.2 Geometrins historia

Begreppet geometri definieras av NE som lantmätarkonst (Nationalencyklopedin 2019). De senaste 100 åren har skolans geometriundervisning gått igenom stora förändringar. Före 1960-talet byggdes skolans geometriundervisning på att bevisa satser ur Euklides Elementa som skrev en serie böcker ca 300 f. Kr. och som inkluderar dåtidens kunskaper i geometri. Efter 1960-talet kom idén om avbildningsgeometrin, men den idén lyckades inte och lärare började bli osäkra kring innehållet. Det ledde till att

geometriundervisningen saknade struktur. För att skapa en struktur i geometriundervisningen krävs en didaktisk insats (Karlsson & Kilborn 2015, s. 145).

2.3 Definitionen av geometri

Inom matematik är geometri ett av de äldsta områdena och behandlar frågor om geometriska figurers form, storlek och position. De geometriska figurer som ofta lyfts fram i matematikundervisningen är punkt, linje, triangel, rektangel och etc. Av dessa geometriska figurer undersöker man även deras egenskaper såsom hörn, längd, area och volym. För att elever ska kunna undersöka detta och förstå innebörden av en geometrisk figur är det viktigt att förstå de ämnesspecifika begreppen (Strävorna 2010).

2.4 Lärares syn på geometriundervisningen

Stavle (1993) har undersökt hur lärare ser på geometri. Forskningsmetoden intervju genomfördes för att få svar på hur lärare uppfattar geometri, varför och hur undervisar man i geometri. Stavle kommer fram till att informanterna tycker att det är svårt att undervisa i geometri eftersom innehållet blir abstrakt och obegripligt för eleverna. Informanterna menar att den tredimensionella geometrin anses som mest komplicerad eftersom eleverna ska tänka i flera steg. Stavle undrar varför det är svårt när vi lever i rum som är tredimensionellt och att alla elever har erfarenheter av geometri. Stavle kommer fram till slutsatsen att det behövs bättre konkretisering för att få en meningsfull verklighetsanknytning för geometrin och dess begrepp. Det är väsentligt att lärarna har en planerad konkretisering av geometriundervisningen för att eleverna ska förstå målet med det som genomförs. När eleverna förstår varför och vad de egentligen gör blir inläringen meningsfull (Stavle 1993).

2.5 Centrala begrepp

I denna studie tillämpas geometriska begrepp i geometriundervisningen och här kommer begreppen definieras utifrån *Matematiktermer i skolan* (2008) av Christer Kiselman och Lars Mouwitz.

Fyrhörning: Plan geometrisk figur som består av fyra punkter. En månghörning med fyra hörn och kan exempelvis vara kvadrat, rektangel, romb, parallelogram och parallelltrapets (Kiselman & Mouwitz 2008, s. 207).

Rätblock: Tredimensionellt geometriskt objekt. Ett rätblock begränsas av sex rektangelområden. När alla dessa är kvadrater har vi en kub. Ett rätblock är en rätvinklig parallelepiped (Kiselman & Mouwitz 2008, s. 226). Ordet epiped kommer av grekiska 'epipedon' och betyder plan, slätt (Kiselman & Mouwitz 2008, s. 223).

Kub: Tredimensionellt geometriskt objekt. En kub definieras som en parallelepiped vars alla sidor är kvadrater. Ordet kub kommer av grekiska 'kybos' och betyder tärning (Kiselman & Mouwitz 2008, s. 222). Kuben begränsas av sex kvadratomböden (Kiselman & Mouwitz 2008, s. 224).

Klot: Tredimensionellt geometriskt objekt. Ett klot har en sfär som begränsningsyta, klotets rand (Kiselman & Mouwitz 2008, s. 227). Den givna punkten kallas klotets medelpunkt och det givna talet kallas klotets radie (Kiselman & Mouwitz 2008, s. 229).

Kon: Tredimensionellt geometriskt objekt. Definitionen av kon är en mängd som består av strålar utgående från en given punkt. Punkten kallas konens spets. Om basytan är en cirkelskiva och höjdens fotpunkt är lika med denna medelpunkt kallas konen för en rak cirkulär kon (Kiselman & Mouwitz 2008, s. 229).

Pyramid: Tredimensionellt geometriskt objekt. Alla sidoytor utom en, basytan, måste vara tringelomböden. Pyramidens volym är lika med en tredjedel av basens area multiplicerat med höjden, som är avståndet mellan konens spets och basens plan (Kiselman & Mouwitz 2008, s. 224).

Cylinder: Tredimensionellt geometriskt objekt. Cylinder har en cirkelbasyta (Kiselman & Mouwitz 2008, s. 227). Cylinder är en polyeder vars sidoytor är regelbundna månghörningsomböden av två slag. Om polyedern är en cylinder används termen höjd endast om den utvalda sidoytan är cylinderns basyta (Kiselman & Mouwitz 2008, s. 221-222).

3. Teoretiska utgångspunkter

Detta avsnitt presenterar teorier utifrån Van Hieles olika nivåer för att förstå geometri och centrala geometriska begrepp i undervisningen. Det sociokulturella perspektivet kommer att belysa den närmaste utvecklingszonen.

3.1 Van Hieles

Van Hieles teori är en modell för hur elever kan lära sig geometri utifrån fem nivåer. Wirszup (1976) beskriver nivåerna på följande sätt: Nivå 1 är visualisering, här lär sig eleven vissa begrepp och känner igen en geometrisk kropp som en helhet. Nivå 2 är analys, här ska eleverna analysera egenskaper hos en geometrisk kropp. Nivå 3 är abstraktion, här ska eleverna ordna de geometriska kropparna och förstå sambanden mellan kropparna och dess korrekta definition. Nivå 4 är deduktion, här ska eleverna bygga upp en helhetsbild av geometrin och kunna dra logiska resonemang. Nivå 5 är stringens, här får eleverna en mer avancerad syn på geometrin då de lär sig bygga upp något utan konkreta föremål (Kilborn 1992, s. 57-58).

Utifrån Van Hieles teori är det acceptabelt att arbeta på en viss nivå som eleven förmår att arbeta med. Det är viktigt att börja med nivå 1 och successivt öka med de andra nivåerna. Däremot om eleven inte förmår att arbeta på det sättet är det bättre att hålla det intellektuella djupet på den nivå eleven klarar av (Kilborn 1992, s. 58).

Forskningsprojektet kommer att utgå ifrån denna teori för att kunna se hur matematiklärare genomför sin geometriundervisning och jämföra det med Van Hieles nivåer. Däremot är undersökningen begränsad på grund av tidsperioden, vilket leder till att denna studie möjligtvis inte kommer att kunna se alla de olika nivåerna i geometriundervisningen.

3.2 Geometriska begrepp i undervisningen

Karlsson och Kilborn (2015) anser att för att skapa en struktur i geometriundervisningen krävs en didaktisk insats (Karlsson & Kilborn 2015, s. 145). Författarna ger tydliga exempel och verktyg för att skapa en didaktisk insats i geometriundervisningen. Karlsson och Kilborn (2015) skriver om längdenheter och enhetsbyten i geometriundervisningen. Författarna menar om en meter delas i tio lika stora delar blir varje sådan del en decimeter. Genom att tala om för eleverna att ”deci” betyder en tiondel och att en decimeter är en tiondels meter. På motsvarande sätt jämför man decimetern med

centimetern och ser att det går 10 cm på 1 dm. Genom att klippa ut ett antal sträckor på 1 dm från centimeter rutat papper, finner man att det ryms 10 dm på 1 meter och samtidigt att det går 100 cm på 1 meter. Författarna anser att här ges goda tillfällen att öva taluppfattning och storleksuppfattning (Karlsson & Kilborn 2015, s. 151).

Författarna lyfter fram plana figurers geometri och konstaterar att en förutsättning för att kunna lösa geometriska problem, är att man kan analysera och resonera om geometriska egenskaper (Karlsson & Kilborn 2015, s. 156). Karlsson och Kilborn skriver om fyrhörningarnas namn och egenskaper och enligt dem bör undervisningen om fyrhörningar genomföras med laborationer. Laborationen sker genom en modellering med att välja ut fyra olika långa pinnar som man fogar samman till en fyrhörning. Eleverna kommer att upptäcka att fyrhörningen har fyra sidor, fyra hörn och fyra vinklar samt att man kan dra två diagonaler och en diagonal delar fyrhörningen i två trianglar (Karlsson & Kilborn 2015, s. 158).

Vidare förklarar författarna om tredimensionella objekt och enligt dem kan undervisningen om kroppar börja med rätblocket. De menar att eleverna kan ta med sig förpackningar i form av rätblock och sedan låta dem klippa isär och undersöka dess former. I detta sammanhang bör man observera att de flesta delarna av en kropp har andra namn än de hade i den plana figuren. Rätblocket är uppbyggt av rektanglar som utgör sidoytor i rätblocket. När två sidoytor möts bildas en kant, däremot heter hörn fortfarande hörn (Karlsson & Kilborn 2015, s. 175). Författarna anser att om eleverna ska få en känsla för hur kroppar är uppbyggda kan eleverna börja med att beskriva några enkla kroppars utseende och i det sammanhanget använda begreppen sidoyta, kant och hörn. Eleverna kan även få tillverka olika kroppar i papper (Karlsson & Kilborn 2015, s. 177).

En kon är en mängd som består av strålar som utgår från en punkt, kallad konens spets. Vanligen brukar man kalla en kon för en rak cirkulär kon, alltså en kon med en cirkel som basyta. Enligt författarna är en pyramid en kon och ofta möter man pyramider som har en liksidig triangel eller en kvadrat som basyta (Karlsson & Kilborn 2015, s. 180-181). Enligt författarna är syftet med laborationer att ge eleverna förtrogenhet med begreppen och dess begreppsanvändning (Karlsson & Kilborn 2015, s. 178). Det är väsentligt för denna studie eftersom jag vill se om geometriundervisningen jag undersöker innehåller didaktiska inslag samt om undervisningen innehåller laborationer av dessa slag och på vilket sätt lärare gör eleverna förtrogna med geometriska begrepp.

3.3 Vygotskijs sociokulturella teori och lärande i matematik

Den närmaste utvecklingszonen, zone of proximal development, är något Vygotskij talar starkt om i den sociokulturella teorin. Utvecklingszonen enligt Vygotskij är när människan är känslig för instruktion och förklaringar. Det är här en lärare eller en kompetent klasskamrat kan vägleda en i lärandet i hur man använder ett kulturellt redskap (Säljö 2014, s. 305). Den närmaste utvecklingszonen sträcker sig i tre sammanhang (Kinard & Kozulin 2012, s. 62). Studien kommer att fokusera på en av dessa sammanhang eftersom den är mest väsentligt för undersökningen. Detta sammanhang handlar om skillnaden mellan vetenskapliga och vardagliga begrepp.

Vetenskapliga begrepp är de begrepp som eleverna lär sig i skolan och vardagliga begrepp kommer ifrån elevens vardagserfarenheter. Andra psykologer ser ingen skillnad mellan dessa termer, medan Vygotskij menar att begreppen har olika ursprung och struktur. De vardagliga begreppen fungerar i olika situationer men eleverna begriper inte den fullständiga kontexten kring ett begrepp eftersom den vetenskapliga definitionen saknas. Det gör att de inte kan se ett samband mellan dessa. Glasersfeld (1995) beskriver vidare hur Vygotskij menar att barn inte kommer tomma till skolan för att lära sig vetenskapliga begrepp, utan de har redan en vardaglig uppfattning kring dessa begrepp.

Det är viktigt att läraren inkluderar elevernas iakttagelser kring introduktion av matematiska begrepp för att just i detta sammanhang sker den närmaste utvecklingszonen för möjlig dialog mellan vetenskapens och vardagens begrepp. Undervisningen i den närmaste utvecklingszonen kräver en koppling mellan de vetenskapliga begreppen och elevernas välbekanta företeelser. Det anses inte produktivt att föra in vetenskapliga begrepp utan att koppla det till elevernas vardagserfarenheter (Kinard & Kozulin 2012, s. 65-66). Varför denna teori kommer att tillämpas till studien är för att jag vill studera när den närmaste utvecklingszonen för möjlig dialog sker mellan vetenskapliga och vardagliga begrepp i geometriundervisningen. I den närmaste utvecklingszonen tydliggörs det att interaktionen är central för att eleverna ska utveckla begreppsförmågan och det betyder att geometriundervisningen bör bli språkinriktad för att uppnå en didaktisk struktur i undervisningen.

3.4 Sammanfattning av teoretiska utgångspunkter

De teoretiska utgångspunkterna som kommer att genomsyra denna studie är Van Hieles olika nivåer för att förstå geometri och centrala geometriska begrepp i undervisningen. Det kommer även att vara Vygotskijs sociokulturella perspektiv gällande närmaste utvecklingszonen för möjlig dialog mellan vetenskapliga och vardagliga begrepp.

4. Tidigare forskning

Här presenteras tidigare forskning som är aktuell för denna studie. Det ges en överblick över forskning som berör matematikämnet, geometriundervisningen och matematiska begrepp. Forskning om geometri och dess ämnesspecifika begrepp har inte skett i en stor utsträckning och med detta har jag valt dessa tre forskningsprojekt.

4.1 Metakognitiva strategier

I studien *The effect of using metacognitive strategies for solving geometry problems on students' achievement and attitude* av Seher Mandaci Sahin och Fatma Kendir (2013) lyfts det fram effekten av att använda metakognitiva strategier för problemlösning i geometri för elever i årskurs 5 i Turkiet. Elevens attityd, färdigheter och prestation undersöktes genom en experimentell metod med ett förprov som var indelat i attitydtest, färdighetstest och prestationstest. Dessa olika test var forskningens empiriska datainsamling av verkligheten. Det utfördes på två olika grupper, en experimentgrupp som undervisades med lektionsplaner som var utformade för att förbättra elevernas metakognitiva färdigheter och en kontrollgrupp som undervisades genom traditionella metoder. Resultatet visade att den experimentella gruppen hade högre resultat jämfört med kontrollgruppen. Det visade sig att experimentgruppen hade utvecklat en bättre inställning till matematikämnet och geometri (Sahin & Kendir 2013). Dessa elever hade utvecklat förmågan att förstå problem, vilket är relevant till min studie då begrepp är en viktig del av ett matematiskt problem. Studien kommer fram till att geometriundervisningen bör inkludera aktiviteter som stödjer utvecklingen av metakognitiva färdigheter.

Utifrån detta anser jag att denna forskning är väsentlig för min undersökning då jag vill se hur lärarna väljer att arbeta metakognitivt för att främja elevernas egna tankeprocesser. Forskningen baseras utifrån problemlösning i geometri och problemlösning bör inte ses som något enskilt i matematik, utan problemlösning finns i alla matematiska problem. Vilket gör forskningen väsentlig för denna studie.

4.2 Det matematiska språket

I studien *På tal om matematik – matematiken, vardagen och den matematikdidaktiska diskursen* av Eva Riesbeck (2008) framhävs det hur viktigt det är att lärare använder ett språk som eleverna begriper i matematikundervisningen. Avhandlingen är byggd på flera studier och jag har valt att välja de delar som är väsentliga för min studie.

Första studien handlar om klassrumsinteraktionen i årskurs 5 i geometri. Syftet med denna studie är att få en beskrivning av hur undervisningen förlöper och vilken interaktion som uppkommer. Klassrummet blir videofilmade och det som dokumenteras är helklassundervisning och grupporganiserad verksamhet och det syns tydligt hur eleverna följer lärarens resonemang. När eleverna ska börja arbeta laborativt märks det hur de inte begriper lärarens budskap eftersom deras matematiska språk brister. Läraren märker hur det matematiska språket försvinner när eleverna utför uppgiften i grupp (Riesbeck 2008). Denna forskning blir relevant för min studie eftersom det som undersöks är interaktionen som en viktig del av undervisningen.

Andra studien handlar om geometriska objekt och genomförs genom att eleverna samtalar i grupp och blir videoinspelade. Syftet med studien är att se hur eleverna arbetar med materialet och vilka begrepp som används. Det framgår tydligt att eleverna kan göra första delen av uppgiften som handlar *göra-nivån* att exempelvis rita, men eleverna klarar inte av *berätta- och förklara-nivån* eftersom det vardagliga språket tar över och det matematiska språket brister. Det visar att *se* och *göra* är ingen garanti för att förstå ett matematiskt problem. Riesbeck skriver att resultaten visar att elever saknar ett lämpligt språk när de exempelvis talar om matematiska begrepp och att lärare saknar kännedom om elevernas förkunskaper i ämnet (Riesbeck 2008). Denna studie blir relevant för min studie eftersom vikten av det vetenskapliga språket undersöks i denna studie och hur lärare ser på den utvecklingen i samband med geometriska begrepp.

4.3 Van Hieles undervisningsstrategi

I studien *Effects of Van Hiele's phase-based teaching strategy and gender on pre-service mathematics teachers' attitude towards geometry in Niger State, Nigeria*, av Hassan Usman, Wun Thiam Yew och Salmiza Saleh (2019) behandlas det effekter av Van Hieles fasbaserade undervisningsstrategi och kön om matematiklärares inställning till geometri i Nigeria.

Studiens forskningsmetod är utifrån en experimentell design med ett förtest och ett eftertest med en experimentell- och kontrollgrupp. Den experimentella gruppen undervisades utifrån Van Hieles fasbaserade undervisningsstrategi i geometri och kontrollgruppen undervisades utifrån samma ämnen men med traditionell undervisningsstrategi. Forskningsmetoden enkät tillämpades utifrån frågor om attityder kring geometri och urvalet blev 149 stycken matematiklärare från två högskolor. Det blev en tvåvägs analys av variation, ANOVA, för att analysera den empiriska datainsamlingen och resultatet visade sig att Van Hieles fasbaserade undervisningsstrategi är effektivare för att förbättra

matematiklärares inställning till geometri. Resultatet om köns effekt på matematiklärares inställning till geometri visade sig vara icke relevant. Till slut kommer studien fram till att lärarutbildningen bör inkludera eller undervisa om Van Hieles fasbaserade undervisningsstrategi eftersom det är en effektiv undervisning som förbättrar elevernas attityder till lärandet av geometri (Usman, Yew & Saleh 2019).

Denna forskning är relevant för denna studie eftersom studiens första frågeställning belyser vilka nivåer som går att identifiera vid introduktion av geometriska begrepp. Detta visar att aktuell forskning har kommit fram till att Van Hieles undervisningsstrategi är användbar i geometriundervisningen och har goda effekter på elevernas inläring samt lärares inställning till geometri.

5. Metod och material

I detta avsnitt kommer studiens olika metoder att förklaras för insamlandet av studiens empiriska data. Ena metoden som använts i studien är klassrumsobservationer och den andra metoden är den kvalitativa forskningsintervjun. Detta avsnitt beskriver dessa två metoder, materialurvalet, genomförandet och till sist de forskningsetiska principer denna studie har följt.

5.1 Studiens metoder

Studiens syfte är att undersöka hur lärare för årskurs 4 och 6 introducerar geometriska begrepp utifrån Van Hieles nivåer för att förstå geometri. Studiens syfte är även att undersöka elevernas användning av geometriska begrepp i samtal utifrån centrala begrepp i geometriundervisningen. Syftet bryts ned med två frågeställningar och de är följande:

- Vilka av Van Hieles nivåer går att identifiera vid introducering av geometriska begrepp?
- Hur använder eleverna geometriska begrepp i samtal vid introduktionen?

Det empiriska materialet samlades in genom observationer och kompletterande intervjuer på tre stycken matematiklärare som arbetar på olika skolor inom Stockholms område. Genom en form av analys av det empiriska materialet kommer det att bli möjligt att besvara studiens frågeställningar.

5.2 Observation

I denna studie genomförs klassrumsobservationer hos tre matematiklärare. Två av lärarna arbetar med årskurs 6 och tredje läraren arbetar med årskurs 4. Lalander (2015) lyfter fram den passiva observationen vilket har tillämpats i denna studie. Den passiva observationen innebär att forskaren inte är delaktig under observationstillfällena då syftet är att iakttä vilka av Van Hieles nivåer som blir tydliga vid introducering av geometriska begrepp samt hur eleverna samtalar kring geometriska begrepp. Genom att inta en passiv roll står forskaren vid kanten och observerar olika händelser som sker i klassrummet. Däremot är det en öppen observation eftersom forskaren tillkännages men att det som dokumenteras inte knyts an till varken eleverna eller läraren. Det betyder att det som händer i klassrummet dokumenteras, men inga personuppgifter kommer att offentliggöras (Lalander 2015, s. 98-100).

Klassrumsobservationerna som genomförs i denna studie är strukturerade utifrån ett observationsschema som jag har utarbetat utifrån studiens syfte och frågeställningar (se bilaga 1). Under observationerna användes ett observationsschema utifrån lärarens- och elevernas perspektiv. Det som observeras från lärarens perspektiv är om läraren använder vetenskapligt språk och i så fall på vilket sätt, används konkret material och hur väljer läraren att förklara geometriska begrepp till eleverna (se bilaga 1).

Utifrån det insamlade empiriska materialet från lärarens perspektiv kommer en form av analys att ske för att kunna identifiera vilka nivåer från Van Hieles undervisningsstrategier som synliggörs. Därefter riktas ett större fokus på eleverna och forskaren intar fortfarande en passiv roll. Det som observeras från elevernas perspektiv är om eleverna arbetar i grupp eller enskilt och i så fall på vilket sätt, använder eleverna vetenskapligt eller vardagligt språk i samtal och vilken stöttning får eleverna när de samtalar om geometriska begrepp (se bilaga 1).

Utifrån det insamlade empiriska materialet från elevernas perspektiv kommer en form av analys att ske. Bjørndal (2005) skriver att observationer ska registreras både under och efter observationerna med hjälp av papper och penna (Bjørndal 2005, s. 45-46). Under observationerna antecknas det vad som sägs och uttalas, ena delen utifrån läraren och andra delen utifrån eleverna i klassrummet.

Efter observationerna sammanställs alla anteckningar från observationerna för att underlätta analysen av samtalen. Jag valde att inte spela in klassrumssamtalen med hänsyn till elevernas integritet. Observationstillfällena sker före intervjuerna för att därefter intervjua läraren kring sina valda strategier under de observerade lektionerna (se bilaga 1).

5.3 Intervju

Förutom klassrumsobservationerna genomför denna studie kompletterande intervjuer med dessa tre verksamma matematiklärare. Eliasson (2013) skriver att genom den kvalitativa metoden får vi möjligheten att komma in på djupet hos det fenomen som undersöks. Inom den kvalitativa metoden utförs det generaliseringar som är baserade kring den valda populationen eftersom urvalet är mindre för en sådan forskningsmetod (Eliasson 2013, s. 21). Därför anses intervju passande för denna studie eftersom jag vill in mer på djupet kring informantens åsikter och erfarenheter om sin geometriundervisning.

Dalen (2015) skriver om den semistrukturerade intervjuformen. Intervjufrågorna formas utifrån en intervjuguide som fokuserar på ett centralt tema och frågor som berör studiens viktigaste område (Dalen 2015, s. 34-35). Intervjuguiden som formades utgick från tre teman och dessa är bakgrundsfrågor, begreppsförmågan och enkla geometriska objekt/figurer. Med hjälp av dessa teman har det formats frågor som tar upp relevanta delar för forskningens syfte. Det är frågor om hur läraren arbetar för att utveckla elevernas begreppsförmåga, hur läraren gör för att introducera geometriska objekt och etc. (se bilaga 2).

Bjørndal (2005) konstaterar att fördelen med en intervju är att samtalet ger en möjlighet att upptäcka detaljer som man kunde ha förbisett under observationen och då få en djupare förståelse av intervjusubjektet under samtalet (Bjørndal 2005, s. 90). Efter observationstillfällena formas ytterligare intervjufrågor utifrån det som antecknas under lektionerna. Dels för att få bakomliggande faktorer kring lärarens valda strategier och dels för att kunna iaktta lärarna i deras naturliga miljö utan att påverka undervisningen (se bilaga 2).

Svensson och Ahrne (2015) skriver att transkribering är första steget till att strukturera och bearbeta det empiriska materialet som samlats in. Under transkriberingen sker en överföring av ljud till skrift för att underlätta tolkningsprocessen av det insamlade materialet (Svensson & Ahrne 2015, s. 24). I samtycke med alla tre lärare spelades intervjuer in för att sedan kunna transkribera materialet. Dessa tre intervjuer har transkriberats för att kunna använda transkriptionscitater från lärarna i resultatet.

5.4 Genomförande

Först presenterades denna studies syfte och frågeställningar i mejl till lärarna och med tillträde till skolorna började jag kort presentera mig till lärarna. Observationerna ägde rum före intervjuerna, där började jag presentera mig kort för eleverna. Anteckning av datainsamling kring observationer genomfördes med observationsschema, penna och sudd och det var under och efter observationstillfällena som anteckningar utfördes.

Därefter genomfördes intervjuer med samtliga lärare. Att spela in intervjuerna med en inspelningsfunktion beviljades och detta gjorde att jag kunde föra en dialog med informanten istället för att fokusera på att anteckna varje ord. Efter varje intervju slutfördes transkriberingar av informantens svar.

5.5 Urval

Dalen skriver om metodiska problem om utvalda informanter inte vill delta i ett forskningsprojekt (Dalen 2015, s. 58). Jag kontaktade mer än ett dussintal verksamma matematiklärare. Problemet som uppstod var att majoriteten av dessa lärare inte arbetar med geometri i dagsläget. De har antingen arbetat med det eller ska arbeta med det längre fram under läsåret. Det var även ett fåtal som tackade nej till enbart en intervju. Men det var tre stycken lärare som tackade ja till en intervju och fler observationer. En av dessa lärare har matematik med årskurs 4 och de resterande två har matematik i årskurs 6. Studien baseras utifrån dessa tre matematiklärare eftersom de arbetar med geometri i dagsläget. Studien namnger informanterna till lärare 1, 2 och 3.

Lärare 1 är matematiklärare i årskurs 6 och har arbetat som matematiklärare i åtta år. Hens utbildningsgrund inom skolväsendet är idrottslärare från förskoleklass till gymnasiet samt matematik, svenska och engelska upp till årkurs sex.

Lärare 2 är matematiklärare i årkurs 6 och har arbetat som matematiklärare i sex år. Hens utbildningsgrund inom skolväsendet är grundlärarutbildning från förskoleklass till årskurs sex med alla kärnämnen och hen läste teknik vid sidan om.

Lärare 3 är matematiklärare i årkurs 4 och har arbetat som matematiklärare i tretton år. Hens utbildningsgrund inom skolväsendet är lågstadielärare från årskurs ett till fyra och är behörig i matematik, naturorienterande ämnen och estetiska ämnen.

5.6 Forskningsetiska principer

Vetenskapsrådet (2002) lyfter de principer som utgör riktlinjer för granskning av forskningsprojekt inom ämnesområdet humaniora och samhällsvetenskap. De delas in i fyra huvudkrav och dessa är *informationskravet*, *samtyckeskravet*, *konfidentialitetskravet* och *nyttjandekravet*.

Informationskravet innebär att forskaren ska informera om den aktuella forskningens syfte (Vetenskapsrådet 2002). Det genomfördes i början av forskningsprojektet för att informanterna ska veta syftet med studien.

Samtyckeskravet innebär att informanterna har rätt att själva bestämma över sin medverkan (Vetenskapsrådet 2002). Det behövs inget samtycke av vårdnadshavare för min studie då observationerna är anonyma och kommer inte att spelas in.

Konfidentialitetskravet handlar om att alla personuppgifter ska försvaras på ett sätt att obehöriga inte kan ta del av det (Vetenskapsrådet 2002).

Nyttjandekravet handlar om de uppgifter som samlas in under studien får endast användas för forskningsändamål (Vetenskapsrådet 2002). Lärarna som kommer att delta i studien kommer att vara anonyma och skolorna kommer inte att namnges. Detsamma gäller för eleverna vid observationstillfällena.

Både lärarna och eleverna kommer att få denna information om deras anonymitet kring forskningsprojektet. Inför forskningsmetoden intervju har jag tänkt ta med en inspelningsfunktion för att vara mer delaktig under samtalet och inte sitta och anteckna hela tiden, men bara om informanten tillåter det. Vid observationstillfällena kommer det inte att användas en inspelningsfunktion.

6. Resultat och analys

Detta avsnitt presenterar studiens resultat. Tematiseringen är utifrån studiens två frågeställningar. Utifrån första frågeställningen presenteras resultat från observationer av alla tre lärare och därefter intervjuer. Efter sker en form av analys kring första frågeställningen och det empiriska materialet utifrån Van Hieles teori. Utifrån andra frågeställningen presenteras resultat utifrån elevernas perspektiv med observationer från varje lärares klassrum. Det presenteras även intervjuer där lärarna talar om elevernas användning av begrepp i samtal. Efter sker en form av analys kring andra frågeställningen och det empiriska materialet utifrån centrala begrepp i geometriundervisningen och den närmaste utvecklingszonen.

6.1 Vilka av Van Hieles nivåer går att identifiera vid introducering av geometriska begrepp

Observationer

Första lektionen, lärare 1:

Lärare 1 introducerar geometriska begrepp genom att skriva upp de flesta på projektorn. Det är följande begrepp: *rätblock, kub, klot, kon, pyramid och cylinder*. Tillsammans med eleverna läser läraren upp begreppen, förklarar objektens egenskaper och tittar på bilder hur objekten ser ut. Eleverna arbetar därefter med ett memory spel som läraren har tillverkat själv. Läraren har klippt ut alla objekt samt begreppen vid sidan om för att eleverna sedan ska kunna para ihop rätt objekt med rätt begrepp. Eleverna arbetar i grupp och de begrepp och objekt som eleverna arbetar med är de begrepp som lärare 1 introducerade.

Andra lektionen, lärare 1:

Lärare 1 fortsätter att undervisa om geometriska begrepp genom att läraren ber eleverna att först rita och därefter beskriva ett geometriskt objekt. Läraren ber eleverna att rita det geometriska objektet pyramid och därefter beskriva dess egenskaper till sin bordskamrat. Efter det frågar lärare 1 hur en pyramid ser ut för att kunna rita det som eleverna beskriver om pyramiden.

Första lektionen, lärare 2:

Lärare 2 introducerar geometriska begrepp genom att använda sig av konkret material (se bilaga 3). Läraren tar fram en prisma och frågar eleverna.

Lärare 2: Vad ser vi för objekt, vad är dess egenskaper och kan vi koppla det till någonting i vår vardag?

Efter att eleverna beskriver objektet ber läraren att någon elev ska komma fram och visa det med hjälp av det konkreta materialet (se bilaga 3). Lärare 2 fortsätter att introducera geometriska begrepp på detta sätt genom att ta fram objekten kub, tetraeder och cylinder (se bilaga 3).

Andra lektionen, lärare 2:

Lärare 2 fortsätter att undervisa om geometriska begrepp genom att eleverna ska i grupp tillverka olika geometriska objekt i papper. Alla grupper har till sitt förfogande A4-papper, tejp, sax, linjal, penna och suddgummi.

Första lektionen, lärare 3:

Lärare 3 introducerar geometriska begrepp med hjälp av en matematiklek med eleverna. Läraren talar om för eleverna att dem ska formulera frågor för att kunna lista ut vilken geometrisk figur som är fastklistrad på deras rygg. Efter en kort genomgång börjar eleverna cirkulera runt i klassrummet och ställa frågor till varandra. Efter 15 minuter summerar läraren matematikleken genom att ställa en fråga till eleverna.

Lärare 3: Vilka geometriska figurer och objekt stötte ni på?

Eleverna talar om vilka begrepp dem stötte på och därefter förklarar läraren skillnaden mellan geometrisk figur och objekt, alltså att det är tvådimensionella figurer men tredimensionella objekt. Lärare 3 talar därefter om längdenheter och menar att om en meter delas i tio lika stora delar blir varje del en decimeter. Läraren talar om för eleverna att deci betyder en tiondel och att en decimeter är en tiondels meter. Till sist talar läraren om jämförelsen mellan decimeter med centimeter och menar att det går tio centimeter på en decimeter. Läraren visar detta med en linjal som är en meter lång och visar de olika längdenheterna på linjalen.

Andra lektionen, lärare 3:

Lärare 3 fortsätter att undervisa om geometriska begrepp genom att eleverna ska ha ute matematik. Läraren har en kort genomgång där hen förklarar att eleverna ska relatera deras vardagliga utomhusaktiviteter till geometri. Läraren talar om för eleverna att skolgården har pingisbord, bollar, sand platser och etc. Elevernas uppgift är att mäta dessa former och beskriva dess egenskaper. Eleverna skriver ned figurernas egenskaper och ritat en tillhörande figur till beskrivningen.

Intervjuer

Lärare 1 talar om under intervjun att hen väljer att introducera geometriska begrepp enligt observationerna ovan. I samband med detta lades planeringen upp för eleverna. De geometriska objekt som lyfts fram under introduktionen är rätklock, kub, klot, kon, pyramid och cylinder. Läraren förklarar att eleverna ska få detta dokument där varje geometriskt objekt har en förklaring och en tillhörande bild. I denna förklaring behandlas ett geometriskt objekts egenskaper. Lärare 1 läser upp en förklaring om ett geometriskt objekt.

Lärare 1: Rätblocket är byggt av rektanglar som bildar sidoytor i rätblocket. När två sidoytor möts bildas en kant, men hörn heter fortfarande hörn. Rätblocket har räta vinklar i de åtta hörnen och har samma form som en skokartong.

Lärare 2 talar om under intervjun att hen väljer att introducera geometriska begrepp enligt observationerna ovan. Läraren konstaterar att konkret material är viktigt i undervisningen och att ställa rätt frågor till eleverna för att lyfta fram elevernas vardagserfarenheter.

Lärare 2: Det ska vara mycket elevnära, när eleverna känner att det här är mitt, då börjar de bygga på sin förståelse. Det är inget främmande och dem känner sig inte vilsna.

Lärare 2 anser att användningen av konkret material i undervisningen utvecklar elevernas inläring (se bilaga 3). Hen vill att eleverna ska känna att ämnesinnehållet är ”mitt” och för att eleverna ska känna det menar läraren att vetenskapliga begrepp såsom kub, vinklar, sidoytor och etc. ska kopplas till elevernas erfarenheter. Lärare 2 menar att på detta sätt kan eleverna därefter tillämpa de vetenskapliga begreppen.

Lärare 3 talar om under intervjun att hen väljer att introducera geometriska begrepp enligt observationerna ovan. Läraren påpekar att matematikleken ger eleverna en förförståelse för det vidare arbetet inom geometri. Lärare 3 lyfter fram under intervjun att denna lek gör så att hen får syn på elevernas förförståelse om geometriska begrepp och det väcker elevernas intresse till arbetsområdet. Lärare 3 konstaterar under intervjun att det är viktigt att eleverna använder ett vetenskapligt språk eftersom de ska kunna tala om kant, hörn, sidoyta och etc. för att kunna förklara flera figurers egenskaper.

Lärare 3: Om eleverna exempelvis förstår begreppet kvadrat kommer de att förstå senare begreppet kub som då är uppbyggt av kvadrater.

Lärare 3 anser att det är detta som skapar förståelse för eleverna, när de förstår betydelsen av begreppen.

Analys

Van Hieles fem nivåer	Visualisering	Analys	Abstraktion	Deduktion	Stringens
Lärare 1	X				
Lärare 2	X	X			
Lärare 3	X	X			

Tabell 1: Visar vilken nivå geometriundervisningen hade vid introducering av geometriska begrepp utifrån Van Hieles fasbaserade undervisningsstrategier.

Lärare 1, 2 och 3 använder visualisering vid introducering av geometriska begrepp. Lärare 1 använder inte konkret material, utan bilder och förklaringar. Däremot använder lärare 2 konkret material med geometriska objekt (se bilaga 3) och lärare 3 använder bilder och förklaringar men att eleverna söker sig kunskapen i en matematiklek. En skillnad mellan dessa tre matematiklärare är att lärare 2 och 3 använder visualisering och analys och det gör inte lärare 1. Lärare 2 och 3 bygger geometriundervisningen på laborationer för att främja elevernas analysförmåga. Lärare 2 och 3 når andra nivån i Van Hieles teori eftersom undervisningen ger eleverna möjligheten att mäta geometriska figurer och vika papper för att tillverka ett geometriskt objekt.

6.2 Hur använder eleverna geometriska begrepp i samtal vid introduktionen

Observationer

I geometriundervisningen av lärare 1 ges eleverna möjligheten att samtala om geometriska begrepp när eleverna först ska rita och därefter beskriva ett geometriskt objekt. Eleverna samtalade med varandra och de begrepp som togs upp var:

Elev 1: Pyramid liknar ett hus och sidorna är lika långa.

Elev 2: Den har fyra sidor och den är tredimensionell.

Elev 3: Pyramiden har en kvadrat i botten.

Elev 4: Den har fyra trianglar alltså de övre sidorna liknar en triangel men som är tredimensionell.

Elev 5: Liksidiga trianglar.

Elev 6: Där är kanterna och hörnen.

I geometriundervisningen av lärare 2 ges eleverna möjligheten att samtala om geometriska begrepp när läraren tog fram konkret material av geometriska objekt. Eleverna fick även möjligheten att samtala om geometriska begrepp när dem skulle tillverka geometriska objekt av papper. Eleverna samtalade med varandra och de begrepp som togs upp var:

Elev 1: Vinklarna är räta.

Elev 2: Hur mäter vi sidoytorna?

Elev 3: En kon har en cirkel som basyta alltså på botten av konet är ytan i form av en cirkel.

Elev 4: En kon har strålar, du ser det från konens spets.

Elev 5: Min låda hemma liknar en prisma.

Elev 6: En kub liknar Rubiks kub leksaken.

Elev 7: Kubens alla vinklar är räta.

I geometriundervisningen av lärare 3 ges eleverna möjligheten att samtala om geometriska begrepp när läraren har matematikleken och utomhus matematik med eleverna. Eleverna samtalade med varandra och de begrepp som togs upp var:

Elev 1: Har figuren fyra hörn?

Elev 2: Är figuren rund som en cirkel?

Elev 3: Triangel och kvadrat.

Elev 4: Rektangel och cirkel.

Elev 5: Rätblock.

Elev 6: Pingisbordet har en rektangel form.

Elev 7: Ska vi mäta pingisbordet med meter eller centimeter?

Elev 8: Sand platsen liknar en kvadrat.

Elev 9: Varför?

Elev 8: För att alla sidor är lika långa.

Intervjuer

I geometriundervisningen av lärare 1 lyfter hen fram under intervjun att arbetar man såsom observationerna ovan får man ut lite mer av eleverna istället för att läraren ska rita det själv och förklara. Lärare 1 anser att här får eleverna möjligheten att samtala om geometriska begrepp och i samband med det förklara geometriska objekts egenskaper. Lärare 1 förklarar att placeringen sker utifrån hur starka eleverna är språkmässigt. En elev som är bra på att uttrycka sig sitter med en nyanländ elev eller med en elev som är svag i språket. Lärare 1 använder denna gruppering för att ge alla elever möjligheten att samtala. På detta sätt får varje elev möjligheten att uttrycka sig och tillsammans med sina klasskamrater kan de lösa ett matematiskt problem.

I geometriundervisningen av lärare 2 konstaterar hen under intervjun att eleverna behöver en vardaglig koppling för att utveckla sin förförståelse och därefter förstå innebörden av de vetenskapliga begreppen i geometriundervisningen. Lärare 2 anser att konkret material är alltid bättre eftersom det utvecklar elevens inläring och att kombinera det med geometriska begrepp blir väldigt effektivt. Till sist talar lärare 2 om placeringen av eleverna när de arbetar i grupp. Lärare 2 väljer att placera eleverna gruppvis i olika nivåer för att de tillsammans ska lösa ett matematiskt problem. Gruppindelningen är följande, en elev som är stark i matematik, en elev som är stark i språket och en elev som är kreativ. Med denna indelning menar lärare 2 att eleverna använder varandras olika kunskaper för att lösa ett problem.

I geometriundervisningen av lärare 3 konstaterar hen under intervjun att undervisningen ska vara varierad. Lärare 3 anser att eleverna ska få möjligheten att öva på olika sätt för att förstå begreppen så att det sitter. Lärare 3 anser att enligt observationerna ovan blir undervisningen varierad och eleverna förstår begreppens innebörd och kan använda miljön ute som ett verktyg i geometriundervisningen.

Analys

Eleverna i undervisningen av lärare 1 använder geometriska begrepp i samtal genom att beskriva några objekts utseende. Resultatet visar att eleverna har förstått pyramidens egenskaper när de talar om liksidiga trianglar och en kvadrat som basyta. Detta går i linje med Karlsson och Kilborns (2015) tankar kring undervisning av geometriska begrepp. Författarna beskriver en undervisning där lärarna kan börja med att eleverna har förpackningar i form av ett rätblock för att påbörja en laboration (Karlsson & Kilborn 2015, s 177). Resultatet visar att det finns en förbättringspotential och det är laborationer av olika geometriska objekt.

Undervisningen av lärare 1 ger inget utrymme för eleverna att koppla sina vardagserfarenheter till ämnesinnehållet. Det är mer än lärarledd undervisning där läraren presenterar geometriska begrepp och eleverna använder de begrepp i samtal. Detta går inte i linje med Vygotskijs (2012) synvinkel kring undervisning i den närmaste utvecklingszonen. Enligt Vygotskij krävs en koppling mellan de vetenskapliga begrepp och elevernas välbekanta företeelser (Kinard & Kozulin 2012, s. 66).

Undervisningen av lärare 1 saknar kopplingen mellan vetenskapliga begrepp och elevernas välbekanta företeelser, vilket visar en förbättringspotential för att utveckla elevernas begreppsförmåga. Lärare 1 placerar eleverna utifrån hur starka eleverna är språkmässigt. En elev som är bra på att uttrycka sig sitter med en nyanländ elev eller med en elev med svagare språkkunskaper och tillsammans kommer de utveckla sina tankar och färdigheter. Resultatet ovan visar att eleverna samtalar med geometriska begrepp. Detta går i linje med Vygotskijs (2014) tanke kring närmaste utvecklingszonen. I ett sampel med varandra når eleverna den närmaste utvecklingszonen och innehar ny kunskap då en kompetent klasskamrat kan vägleda en i lärandet (Säljö 2014, s. 305).

Eleverna i undervisningen av lärare 2 använder geometriska begrepp i samtal genom att samtala om olika geometriska objekt med hjälp av konkret material. Eleverna får även möjligheten att samtala om geometriska begrepp när dem ska tillverka geometriska objekt med papper. Detta går i linje med Karlsson och Kilborn (2015) som anser att laborationer av geometriska objekt ökar elevers inläring av geometriska begrepp. Författarna menar att om elever ska få en känsla för hur objekt är uppbyggda kan eleverna få tillverka olika objekt med papper (Karlsson & Kilborn 2015, s. 177-178). Det framgår att i undervisningen av lärare 2 innehåller konkret material för att eleverna ska beskriva dess egenskaper. Eleverna nämner de geometriska objekten med korrekta vetenskapliga begrepp och det visar att undervisningen har hjälpt eleverna förstå innebörden av begreppen. Undervisningen ger inslag av en didaktisk insats eftersom eleverna laborerar med papper för att tillverka de geometriska objekten.

Eleverna har först fått se objekten visuellt och samtalat kring det och därefter arbetar eleverna med att själva tillverka geometriska objekt. En undervisning med laborationer ger eleverna en känsla för hur objekten är uppbyggda och det gör eleverna bekanta med de geometriska begreppen.

Eleverna i undervisningen av lärare 2 synliggör den närmaste utvecklingszonen när eleverna först samtalar med läraren och därefter med sina klasskamrater i grupparbetet. Under första och andra lektionen som presenteras ovan av lärare 2 ställs det vägledande frågor av läraren för att utveckla elevernas språkliga resurs och som synliggörs i grupparbetet när eleverna använder vetenskapliga geometriska begrepp. Det går i linje med Vygotskijs (2012) perspektiv kring den närmaste utvecklingszonen mellan vetenskapliga begrepp och elevernas välbekanta företeelser (Kinard & Kozulin 2012, s. 66). En undervisning som kan kopplas till elevernas tidigare erfarenheter visar att eleverna blir mer delaktiga i undervisningen och kan relatera sin förståelse för ämnesinnehållet. Lärare 2 väljer att placera eleverna utifrån olika nivåer för att tillsammans uppnå den närmaste utvecklingszonen. Vygotskij (2014) anser att en kompetent klasskamrat kan vägleda ens lärande framåt för att komma åt den närmaste utvecklingszonen (Säljö 2014, s. 305). Lärare 2 tillämpar detta i gruppindelningen för att eleverna tillsammans ska stärka varandra i språket och ämnesinnehållet. Språkbruket eleverna tillämpar är vardagligt i början och med hjälp av lärarens vägledande frågor blir elevernas språk mer vetenskapligt. Det visar att undervisningen bygger på språklig stöttning för att utveckla elevernas begreppsförmåga.

Eleverna i undervisningen av lärare 3 använder geometriska begrepp i samtal genom en laboration utomhus. Eleverna använder vetenskapliga begrepp i samtalen mellan varandra eftersom dem ska identifiera en vardaglig utomhusaktivitet till en geometrisk figur och börja mäta. Detta går i linje med Karlsson och Kilborn (2015) som anser att laborationer av geometriska figurer är väsentligt för elevernas inläring (Karlsson & Kilborn 2015, s. 156). Med en laboration enligt observationerna får eleverna möjligheten att samtala med geometriska begrepp. I undervisningen synliggörs det hur eleverna tar lärdom ifrån vardagliga exempel som utfördes under utomhus matematiken. När eleverna samtalar om hur pingisbordet har en rektangel form och att sand platsen liknar en kvadrat har undervisningen genomgått av vetenskapliga begrepp som kopplas till elevernas välbekanta företeelser. Detta går i linje med Vygotskijs (2012) syn på den närmaste utvecklingszonen (Kinard & Kozulin 2012, s. 66). Undervisningen av lärare 3 visar att dialogen mellan eleverna är med ett vetenskapligt språkbruk. Det visar att undervisningen ser interaktionen som en viktig del för att utveckla elevernas begreppsförmåga. När lärare 3 uppmärksammar elevernas förståelse under matematikleken och utomhus matematiken begriper hen elevernas kontext inför det matematiska problemet. På detta sätt kan läraren

uppmärksamma elevernas tänkande och resonering. Detta ger eleverna en djupare förståelse för de matematiska begreppen eftersom lärare 3 tillämpar en stor del av interaktion och språklig stöttning i geometriundervisningen.

7. Diskussion

I detta avsnitt diskuteras metoden för studien. Därefter diskuteras studiens resultat i förhållande till studiens syfte, frågeställningar och tidigare forskning. Avslutningsvis redogörs didaktiska implikationer, slutsats och ett förslag på vidare forskning.

7.1 Metoddiskussion

För att få ett mer generellt perspektiv kunde denna studie implementerats på ett större antal matematiklärare. I början av forskningsprojektet kontaktades mer än ett dussintal verksamma lärare, men problematiken som uppstod var att majoriteten inte undervisade i geometri i dagsläget. Lärarna hade antingen arbetat med det eller planerade att arbeta med det längre fram under läsåret. Vilket påverkade denna studie på grund av tidsperioden. Denna studie var från början rätt så tidsbegränsad och med hänsyn till lov dagar i grundskolan räknades vissa dagar bort.

Studiens teoretiska utgångspunkt kring Van Hieles fasbaserade undervisningsstrategier tillämpades inte fullständigt på grund av tidsbegränsningen. Hade studien inte varit så pass tidsbegränsad skulle fler observationer genomföras för att samla in empirisk data utöver det som har samlats in. Med hjälp av dessa observationer hade det möjligtvis synliggjort om geometriundervisningen utgår ifrån Van Hieles alla olika nivåer för att förstå geometri.

7.2 Resultatdiskussion

Detta avsnitt diskuterar studiens resultat i förhållande till studiens frågeställningar. Det kommer även att diskuteras utifrån studiens syfte och tidigare forskning.

7.2.1 Vilka av Van Hieles nivåer går att identifiera vid introducering av geometriska begrepp

Syftet med denna studie är att undersöka hur lärare introducerar geometriska begrepp utifrån Van Hieles nivåer för att förstå geometri.

Resultatet i denna studie har visat att alla tre lärare börjar med att visualisera geometriska begrepp till eleverna. Utifrån Van Hieles nivåer för att förstå geometri använder alla tre lärare nivå 1. Däremot väljer lärarna att visualisera det på olika sätt. Lärare 1 använder inte konkret material såsom lärare 2 gör i sin undervisning. Lärare 1 använder bilder med beskrivningar medan lärare 2 använder konkret material

med geometriska objekt (se bilaga 3). Lärare 3 använder bilder och beskrivningar men att eleverna söker sig kunskapen i en matematiklektion när de ställer frågor till varandra. Skillnaden mellan alla tre lärarna är att lärare 1 inte tillämpar analysnivån utifrån Van Hieles nivåer, vilket lärare 2 och 3 använder vid introduktion av geometriska begrepp. Det visar sig att lärare 2 och 3 bygger deras geometriundervisning på laborationer där eleverna får mäta geometriska figurer och vika papper för att tillverka ett geometriskt objekt. Det går att identifiera nivå 2, analys, utifrån Van Hieles nivåer för att förstå geometri hos lärare 2 och 3 men inte lärare 1.

Resultatet i denna studie har visat att lärare 2 och 3 låter eleverna laborera genom att mäta geometriska figurer och vika papper för att tillverka ett geometriskt objekt. Dessa elever får en undervisning där geometriska objekt/figurer visualiseras och här får eleverna möjligheten att analysera. Däremot visar studiens resultat att undervisningen av lärare 1 aldrig uppnår analysnivån eftersom undervisningen ger eleverna ingen möjlighet för att laborera med geometri. Laborationer inom geometri stödjer elevernas utveckling av metakognitiva färdigheter eftersom elevernas egna tankeprocesser startar igång i en sådan undervisning. Detta går i linje med Sahin och Kendirs (2013) studie som kommer fram till att undervisning som ser till att förbättra elevers metakognitiva färdigheter är väsentligt för att elever ska begripa ett matematiskt problem (Sahin & Kendir 2013). Vid introduktionen av geometriska begrepp tillämpas elevernas metakognitiva färdigheter av de tre lärarna genom att eleverna själva får tänka med hjälp av klasskamraters och lärarens vägledning. Utifrån Van Hieles nivåer att förstå geometri tillämpas visualisering och analys för att introducera geometriska begrepp, vilket går ihop med Sahin och Kendirs tankar kring elevernas utveckling av metakognitiva färdigheter. Däremot tillämpar inte lärare 1 detta eftersom eleverna inte får möjligheten att analysera geometriska objekt såsom Van Hieles nivå, analys, menar att eleverna ska analysera.

I den studie som Usman, Yew och Saleh (2019) har undersökt kommer de fram till att Van Hieles fasbaserade undervisningsstrategi är effektiv för att förbättra matematiklärares och elevers inställning till geometri (Usman, Yew & Saleh 2019). För att nå en mer didaktisk insats i geometriundervisningen kan man utgå ifrån Van Hieles fasbaserade undervisningsstrategi. Det man kan tolka utifrån denna studies resultat är att lärare 2 och 3 använder visualisering och analys för att främja elevernas begreppsförmåga.

Vid introduktionen av geometriska begrepp tillämpas nivå 1 som är visualiseringen av de tre lärarna som denna studie har följt. En sådan geometriundervisning kan möjligtvis förbättra elevernas attityder

till lärandet av geometri. Med en liknande undervisning som inkluderar Van Hieles nivå visualisering vid introducering av geometriska begrepp kan undervisningen bli mer didaktiskt inriktad.

7.2.2 Hur använder eleverna geometriska begrepp i samtal vid introduktionen

Studiens syfte är även att undersöka elevernas användning av geometriska begrepp i samtal utifrån centrala begrepp i geometriundervisningen.

Resultatet i denna studie har visat att eleverna i undervisningen av lärare 1, 2 och 3 samtalar med geometriska begrepp vid introduktionen.

Eleverna använder begrepp såsom ”sand platsen liknar en kvadrat”, ”en kon har en cirkel som basyta alltså på botten av konet är ytan i form av en cirkel” och ”pyramiden har en kvadrat i botten”.

Dessa enstaka exempel synliggör att dessa elever har fått en förståelse för vad de geometriska begreppen innefattar och kan tillämpa det i diskussion med sina klasskamrater (se avsnitt 6.2 fler exempel).

Resultatet i denna studie har även visat att undervisningen kräver lärarens vägledning för att eleverna ska kunna tillämpa vetenskapliga begrepp och förstå innebörden. En undervisning som har starka kopplingar mellan elevernas vardagliga erfarenheter och vetenskapliga begrepp är givande för begreppsutvecklingen. Detta visar mitt resultat från lärare 2 och 3 där lärarna inkluderar elevernas erfarenheter och knyter an det till ämnesinnehållet.

Undervisningen i lärare 1:s klassrum visar att en elev genomförde en självständig vardaglig koppling utan lärarens stöd.

Eleven säger ”pyramid liknar ett hus och sidorna är lika långa”.

Det blir tydligt att lärare 1 inte inkluderar elevernas vardagliga erfarenheter till de geometriska begreppen. Om lärare 1 skulle inkludera det skulle nog fler elever kunna genomföra sådana kopplingar. Detta går i linje med Riesbecks (2008) tankar kring hur elevernas förkunskaper kan bidra till sammankopplingen till elevernas välbekanta företeelser. Författaren menar att om lärare inte har kännedom om elevers förkunskaper leder det till att det matematiska språket brister i samtal (Riesbeck 2008). Med detta sagt ska undervisningen bygga på eleverna vardagliga erfarenheter för att det ska

finnas en möjlighet att sammankoppla det till ämnesinnehållet. På detta sätt samtalar eleverna mer på en vetenskaplig nivå.

Resultatet i denna studie visar att med tillämpning av Van Hieles nivå 2, analys, utvecklar eleverna sin analysförmåga. Analysförmågan innefattar bland annat att elever har utvecklat sina metakognitiva färdigheter. Detta går i linje med Sahin och Kendir (2013) som anser att olika undervisningsaktiviteter utvecklar elevens metakognitiva färdighet (Sahin & Kendir 2013). Undervisningsaktiviteterna som lärare 2 och 3 håller i visar att eleverna har utvecklat sin analysförmåga, kommunikativ förmåga och begreppslig förmåga. De aktiviteter som sker i undervisningen av lärare 2 och 3 är typiska exempel på laborationer. Dessa elever får möjligheten att tillverka geometriska objekt av papper och samtala med sina klasskamrater om objektets egenskaper. Dessutom får eleverna möjligheten att mäta geometriska figurer utomhus och koppla vardagliga erfarenheter till geometriska vetenskapliga begrepp. Detta går i linje med Karlsson och Kilborns (2015) idéer kring att nå en didaktisk insats i geometriundervisningen. Författarna anser att syftet med laborationer är att ge elever förtrogenhet med begrepp och dess begreppsanvändning (Karlsson & Kilborn 2015, s. 178). Resultatet i denna studie har visat att undervisning med laborationer ger elever mer möjligheter att samtala om geometriska begrepp på en vetenskaplig nivå.

Eleve exempel: ”en kon har strålar, du ser det från konens spets”.

Detta elevexempel synliggör att denna elev har förstått introduceringen av lärare 2 när aktiviteterna var att tillverka geometriska objekt i papper. När eleverna får vika papper och mäta ges det goda tillfällen för samtal av geometriska begrepp.

7.3 Didaktiska implikationer

Stavle (1993) konstaterar att det behövs bättre konkretisering för att få en meningsfull verklighetsanknytning för geometrin och dess begrepp. Det är viktigt att geometriundervisningen innehåller en planerad konkretisering för att eleverna ska förstå målet med det som genomförs. När eleverna begriper varför och vad de egentligen arbetar med blir inläringen meningsfull (Stavle 1993). Denna studie visar hur dessa tre lärare arbetar för att främja elevernas begreppsförmåga. De väljer att arbeta visuellt och konkret i samband med interaktion. Lärarna vägleder eleverna med språklig stöttning för att kunna gå ifrån ett vardagligt språk till ett mer vetenskapligt språk.

Vidare konstaterar Holmberg (2011) att med användning av nivå 2 utifrån Van Hieles teori i geometriundervisningen ger vi eleverna en möjlighet att undersöka och analysera mer, vilket leder till ökad möjlighet att förstå geometri (Holmberg 2011). Resultatet på denna studie synliggör att visualisering är avgörande som först steg i geometriundervisningen för att därefter tillämpa analys av geometriska begrepp innan eleverna får möta beräkningsuppgifter.

7.4 Slutsats

Studiens syfte var att undersöka hur lärare för årskurs 4 och 6 introducerar geometriska begrepp utifrån Van Hieles nivåer för att förstå geometri. Studiens syfte var även att undersöka elevernas användning av geometriska begrepp i samtal utifrån centrala begrepp i geometriundervisningen. Studiens syfte besvarades utifrån frågeställningarna: vilka av Van Hieles nivåer går att identifiera vid introducering av geometriska begrepp och hur använder eleverna geometriska begrepp i samtal vid introduktionen.

Slutsatsen av denna studie är att de nivåer som går att identifiera utifrån Van Hieles teori är visualisering och analys. Studien visar att lärare 1 använder visualisering, medan lärare 2 och 3 använder visualisering och analys för att introducera geometriska begrepp till eleverna. Geometriundervisning som inkluderar laborationer främjar elevernas analytiska färdigheter vilket innefattar nivå 2 ur Van Hieles teori. Slutsatsen är även att det matematiska språket ska kopplas till elevernas välbekanta företeelser för att eleverna ska förstå innebörden av de geometriska begreppen.

7.5 Vidare forskning

Det skulle vara intressant att genomföra en liknande undersökning men under en längre tidsperiod. Dels för att kanske få möjligheten att se alla nivåer i Van Hieles fasbaserade undervisningsstrategi och dels för att se hur geometriundervisningen ser ut i årkurs 5 och inte enbart årskurs 4 och 6. Under en längre tidsperiod ges fler tillfällen för möjliga observationer vilket gör att man kan se om geometriundervisningen följer samma mönster genom hela arbetsprocessen.

Käll- och litteraturförteckning

Ahrne, G, Ahrne, G & Svensson, P. (2015). *Handbok i kvalitativa metoder*. 2., [utök. och aktualiserade] uppl. Stockholm: Liber.

Bjørndal, Cato R. P. (2005). *Det värderande ögat: observation, utvärdering och utveckling i undervisning och handledning*. 1. uppl. Stockholm: Liber

Dalen, M. (2015). *Intervju som metod*. 2., utök. uppl. Malmö: Gleerups utbildning.

Eliasson, A. (2013). *Kvantitativ metod från början*. 3., uppdaterade uppl. Lund: Studentlitteratur.

H. Usman, W. T. Yew & S. Saleh. (2019). AfricanJournal of educational studies in mathematics and sciences Vol. 15, 2019. *Effect of van Hiele's phase-based teaching strategy and gender on pre-service mathematics teachers' attitude towards geometry in Niger State, Nigeria*. Nigeria.

Karlsson, N & Kilborn, W. (2015). *Matematikdidaktik i praktiken: att undervisa i årskurs 1-6*. 1. uppl. Malmö: Gleerups Utbildning

Kilborn, W. (1992). *Didaktisk ämnesteorin i matematik D. 3 Mätning, geometri, funktioner, sannolikhetslära och statistik*. 1. uppl. Stockholm: Utbildningsförl.

Kinard, James T. & Kozulin, A. (2012). *Undervisning för fördjupat matematiskt tänkande*. Lund: Studentlitteratur.

Kiselman, C & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer i skolan*. Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs universitet.

Lgr 11, *Läroplan för grundskola, förskoleklassen och fritidshemmet 2011: reviderad 2018*. (2011). 5. uppl.

Lundgren, U. P., Säljö, R. & Liberg, C. (red.) (2014). *Lärande, skola, bildning: [grundbok för lärare]*. 3., [rev. och uppdaterade] utg. Stockholm: Natur & kultur

Löwing, M. (2011). *Grundläggande geometri: matematikdidaktik för lärare*. 1. uppl. Lund: Studentlitteratur

Nämnamn 2011, *Analysera mera i geometri*. Av Holmberg, B. Tillgänglig: http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/1015_11_4.pdf [hämtad 2019-11-01]

Nämnamn 1993, *Hur ser lärare på geometri?* Av Stavle, E-L. Tillgänglig: http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/1820_93_2.pdf [hämtad 2019-11-01]

Riesbeck, E. (2008). *På tal om matematik: matematiken, vardagen och den matematikdidaktiska diskursen*. Linköping: Linköpings universitet.

Nationellt centrum för matematikutbildning (2010). Strävorna. C – *Geometri*. Tillgänglig: <http://ncm.gu.se/CG> (Publicerad 2010-12-16) [hämtad 2019-10-27].

Mandaci Sahin, S. & Kendir, F. (2013). *AcademicJournals 2013. The effect of using metacognitive strategies for solving geometry problems on students' achievement and attitude*. Turkiet.

Skolverket. (reviderad 2017). *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik*.

Nationalencyklopedin 2019, *Geometri*. Tillgänglig: <https://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/l%C3%A5ng/geometri> [hämtad 2019-10-25].

TIMSS 2015. *Svensk grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv*. Tillgänglig: Skolverket <https://www.skolverket.se/publikationsserier/rapporter/2016/timss-2015.-svenska-grundskoleelevers-kunskaper-i-matematik-och-naturvetenskap-i-ett-internationellt-perspektiv>

Ladda ned pdf. [hämtad 2019-10-25].

Vetenskapsrådet 2002, *Forskningsetiska principer inom humanistiska-samhällsvetenskaplig forskning*. Tillgänglig: https://www.gu.se/digitalAssets/1268/1268494_forskningsetiska_principer_2002.pdf

[hämtad 2019-10-29]

Bilagor

Bilaga 1 Observationsschema

Årskurs:

Datum:

Lärare:

Observations tid:

Lärarens perspektiv

Använder läraren vetenskapligt eller vardagligt språk?	...
Använder läraren konkret material för att tydliggöra ett begrepp? I så fall vad används och på vilket sätt?	...
Hur använder läraren sig av det matematiska språket?	...
Hur väljer läraren att förklara geometriska begrepp?	...

Övrigt	...
---------------	-----

Elevernas perspektiv

Vilken stöttning får eleverna när de samtalar om begreppen?	...
Arbetar eleverna i grupp eller enskilt? I så fall på vilket sätt?	...
Använder eleverna vetenskapliga eller vardagliga begrepp när de talar om geometri?	...
Ges eleverna utrymme att samtala om geometriska begrepp under lektionen?	...
Övrigt	...

--	--

Bilaga 2 Intervjuguide

- **Berätta om studiens syfte**
- **Belys de etiska ställningstaganden**
- **Fråga om lov till inspelning**

Bakgrundsfrågor

- Vilken utbildningsgrund har du?
- Hur länge har du arbetat som lärare i matematik?
- Vad anser du är det viktigaste/centrala inom matematik?

Begreppsförmågan

- Kan du beskriva begreppsförmågan?
- Hur arbetar du för att utveckla elevernas begreppsförmåga?

Enkla geometriska objekt

- Vilka geometriska figurer brukar elever ha förkunskaper kring?
- Hur gör du när du ska introducera nya geometriska objekt?
- Hur vet du att eleverna har förstått det?
- Vilken stöttning får eleverna när de samtalar om begreppen?
- Tycker du att eleverna ska använda vetenskapliga begrepp när de talar om geometri? varför?
- När får eleverna möjligheten att samtala om geometriska begrepp under lektionen?
- Vid mitt observationstillfälle såg jag ... kan du förklara varför?
- Vid mitt observationstillfälle såg jag ... kan du förklara varför?

Bilaga 3 Geometriska objekt

