Att bråkas med bråk!

En kvalitativ studie i årskurs 3, som med hjälp av Diamantdiagnosens formativa bedömning ger inblick i elevers svårigheter med bråk.

Av: Jeanette Johansson

Handledare: Natalia Karlsson
Södertörns högskola | Institutionen för kultur och lärande
Självständigt arbete 1 15 hp
Vt-terminen 2017
Programmet för Grundlärarutbildningen med interkulturell profil, mot förskoleklass och årskurs 1-3

SÖDERTÖRNS HÖGSKOLA | STOCKHOLM
sh.se

Abstract To fighting with fractions!

A qualitative study in third grade, using "Diamantdiagnosens" formative assessment provides insight into students' difficulties of fractions.

Author: Jeanette Johansson, spring term 2017

Supervisor: Natalia Karlsson

The purpose of this study is to understand the difficulties third grade students have with fractions. Previous research indicates that students have difficulties understanding fractions, and fractions as a number seem to be the most difficult, while fractions as part of whole seem less difficult. Further, research also shows that fractions as numbers are the most important for student understanding of advanced levels of mathematics, such as algebra.

This study is based on diagnostic tests using the diagnostic tool "Diamantdiagnosen" and follow-up interviews of 6 students. The diagnostic tool is available on the Skolverkets website and serves as a support for teachers to do a formative assessment of students. The diagnostic test was followed by interviews where the students could elaborate on the difficulties they encountered and how they felt when solving the assignments. In order to categorize the difficulties the students encountered during the diagnostic part, theory of formative assessment, variation and perception of number skills was used.

The result of the diagnostic test showed that the students made the most errors with fractions as part of a whole, contrary to previous research. However, the interviews showed a different result where the students felt that the part of diagnosis with fractions as a number was the most difficult. Comparing the result of the diagnostic test in this study with previous research, the results do not come to the same conclusion. If we look at the views expressed in the interviews, and the assistance strategies (drawing), the students needed help with fractions as numbers in the diagnostic test, and the result pointing in the same direction as previous research. Research conducted in a different setting with older students and slightly more advanced tasks.

Keywords: Fraction as a number, formative assessment, Diamantdiagnos, variation theory and perception of number skills.

Nyckelord: Bråk som tal, formativ bedömning, Diamantdiagnos, variationsteori och taluppfattning

Innehållsförteckning

1. Inledning

Det här självständiga arbetet handlar om matematik och begreppet bråk. Det är en kvalitativ studie med ett litet urval av elever som hjälper mig att förstå vilka svårigheter elever har med bråk. Undersökningen handlar om att se var svårigheterna uppkommer och elevers upplevelse av vad som är svårt inom bråkens olika ansikten/aspekter. Madeleine Löwing (2008) i boken *Grundläggande aritmetik* menar att bråk kan uppfattas på olika sätt. De olika aspekterna är ”ett tal, en del av en hel, en del av ett antal, division som metafor, en andel, en proportion, ett förhållande eller som en skala" (ibid, s. 250).

Jag kommer att benämna de olika ansiktena som aspekter eller områden inom bråk. De tre första aspekterna alltså bråk som tal, bråk som en del av en hel och bråk som del av ett antal kommer jag att bearbeta och utveckla i min teoridel tillsammans med taluppfattning av bråk. Det är dessa aspekter som studien kommer att handla om. Anledningen till att studien handlar om dessa tre aspekter är för att det är dessa delar som elever i årskurs tre bör klara av. I Läroplanen (2016) står det i det centrala innehållet inom ämnet matematik:

> Del av helhet och del av antal. Hur delarna kan benämnas och uttryckas som enkla bråk samt hur enkla bråk förhåller sig till naturliga tal.
> Naturliga tal och enkla tal i bråkform och deras användning i vardagliga situationer (Skolverket 2016c, s. 56).

En del av en helhet och en del av ett antal är klart och tydligt i Läroplanen. Bråk som tal står inte helt tydligt i Läroplanen men att se hur förhållandet mellan bråk och naturliga tal är, handlar om att bråk är ett tal precis som naturliga tal och kan definieras som området bråk som tal.

I den här studien benämns bråk även som rationella tal, för att vissa författare och dylikt benämner ibland bråk som rationella tal. Rationella tal är ett samlingsnamn för flera områden, där bråk ingår. När rationella tal beskrivs i den här studien är det liktydigt med begreppet bråk.

2. Bakgrund

Anledningen till att jag vill göra en studie om hur elevernas svårigheter inom bråk ser ut är för att det finns en allmän uppfattning av att det förekommer svårigheter inom arbetet med bråk. Jag har själv i min utbildning fått en uppfattning om att bråk är krångligt för många, speciellt när de ska räkna med bråk. Många har lärt sig regler för hur man gör en beräkning, men de vet inte varför man gör på ett visst sätt.

Löwing (2008, s. 248) menar att när det gäller bråk förekommer det bristande taluppfattning bland många elever. Löwing har gjort en undersökning med olika räkneuppgifter. Undersökningen var utförd av cirka 500 elever i årskurs sju och 500 elever i årskurs nio. Resultatet visade på att det förekommer problem för elever att räkna med tal i bråkform. Ett exempel är uppgiften $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, det var endast 28 % av eleverna i årskurs sju som klarade uppgiften och 44 % av eleverna i årskurs nio. Vidare i undersökningen presenteras fler uppgifter, men det är inte fler elever som klarar dessa uppgifter heller. Den uppgift där procentsatsen är bäst är uppgiften $8 \cdot \frac{1}{2}$, där 45 % av eleverna i årskurs sju klarade uppgiften och 72 % i årskurs nio. Detta resultat är ändå lågt och man kan tydligt se att beräkningar av tal i bråkform är ett stort problem för elever. Även om det var fler elever som klarade den sista uppgiften, gentemot den första så är resultatet ändå lågt då elever i både årskurs sju och nio borde klara att multiplicera 8 med en halv. Troligtvis klarar eleverna detta, men bara för att en halv står i bråkform så kanske det låser sig och eleverna upplever att det är svårare än vad det är. Löwing (2008, s. 249) menar att troligtvis har inte eleverna gett uppgiften en mening och ser räkneoperationen som en procedur som saknar en konkret förankring.

Arne Engström (1997, s. 83) i boken *Reflektivt tänkande i matematik: Om elevers konstruktioner av bråk* menar att dels måste bråk ses som en enskild kvantitet, men å andra sidan måste man se bråk som ett par av tal. Han menar att elever kanske inte uppfattar bråk som ett tal, då deras tidiga erfarenheter av tal gör att de inte ser bråk som ett tal. De tidigare erfarenheterna som han menar är troligtvis elevers tidigare erfarenheter av naturliga tal. Att se bråk som ett tal kan på så vis vara svårt, det är lättare att förstå bråk som en del av någonting.

Lågstadieläraren Berit Bergius (2011, s. 7) i artikeln *Bråk från början* menar att intresset för tal och antal utvecklas tidigt i barns liv. Vidare menar hon att man ska tillvarata vardagskunskaper för att nå framgångar i matematik. Engström (1997, s. 89) menar att barns informella kunskaper om delning utvecklas i vardagslivet och dessa kunskaper borde vara en grund för ett mer formellt lärande inom rationella tal i skolan. Det borde vara en grund för skolan då skolan i sig tycks fokusera på del av något inom bråk. Enligt Natalia Karlsson och Wiggo Kilborn (2015, s. 92) i boken *Matematikdidaktik i praktiken* så är det bråk som del av en hel och del av ett antal som skolorna fokuserar undervisningen på. Men att undervisningen är fokuserad på delar av något, har det då att göra med att delar är kopplat till vardagserfarenheter?

Bergius (2011, s. 7) påpekar att användningen av bråkuttryck inom vardagen förekom mer frekvent bakåt i tiden. Förr använde man bråk i en större utsträckning än idag. Kan det då vara på grund av att vardagserfarenheterna inom bråk inte används lika frekvent idag som det gjorde förr, som gör att vi får större svårigheter av förståelsen av bråk?

Karlsson och Kilborn (2015, s. 92) uttrycker likt Bergius att man inte använder bråk i vardagen lika ofta nu som förr. De menar att det har skett en övergång från bråkform till att arbeta med decimalform i arbetet med tal i bråkform. Engström (1997, s. 98) menar att mötet av decimalform i vardagen kan vara genom priser, vikter och olika mått. Vidare menar han att det anses som enklare att räkna i form av decimaltal gentemot bråktal, men att det inte är det.

Eftersom eleverna inte stöter på bråk så ofta i vardagen, så är det inte konstigt att bråk kan upplevas som svårt. Karlsson och Kilborn (2015, s. 92) menar att skolan arbetar med bråk som delar men glömmer i stort sätt bort att arbeta med bråk som tal. Detta skulle kunna bero på att bråk som del av ett antal och en del av en helhet är det som eleverna lättare kan applicera på vardagserfarenheter (exempelvis bakning och uppdelning av saker).

Alistair McIntosh (2009, s. 29) i boken *Förstå och använda tal - en handbok* menar att undervisning i bråk har traditionellt sett inte möjliggjort att utveckla elevers förståelse av vad bråk är på grund av att elever inte fått tillräckligt med tid till detta. Däremot har den tiden som lagts på bråk i skolan, handlat om att lära ut regler för att kunna räkna med bråk. Eleverna har på så vis inte fått några djupare kunskaper om bråk och reglerna kan på så vis bli svåra att använda, då eleverna egentligen inte förstår vad de gör.

Det är väldigt viktigt för elever att de lär sig bråkens grunder tidigt, för att kunna klara av matematiken i framtiden. Det är inte bara viktigt för att förstå bråk, utan kunskaperna är bra baskunskaper för andra delar inom matematiken. Att förstå bråk är bland annat viktiga baskunskaper för att senare kunna förstå algebra (Löwing 2008, McIntosh 2009, Karlsson & Kilborn 2015).

Wiggo Kilborn (2014, s. 4-5) i artikeln *Om tal i bråk- och decimalform - en röd tråd* menar att bråk inte kan behandlas separat från övriga delar av matematiken. Elever lär sig i tidig ålder räkneregler och räknelagar för de naturliga talen. Lagarna är de samma vid arbete av de rationella talen, med vissa tillägg. Vidare menar han att de nya räknelagarna i sin tur är centrala baskunskaper för att arbeta med både rationella tal och algebra.

Det finns flera anledningen till att jag vill undersöka vilka svårigheter elever har inom bråk. Det första är att arbetet med bråkens olika aspekter får olika tid och uppmärksamhet i skolan. Dessutom får elever oftast lär sig regler i stället för att nå en djupare förståelse för att räkna med bråkuppgifter. På så vis upplevs bråk som svårt och ofta brister kunskaperna inom bråk för gemeneman. Jag vill framför allt undersöka om svårigheterna finns inom aspekten bråk som tal, som kanske är lite bortglömt i skolorna. Bråk som tal är dessutom viktigt för framtida matematik (Löwing 2008, McIntosh 2009, Karlsson & Kilborn 2015).

I och med att bråk är en sådan viktig del inom matematik och att många elever brister i bråkkunskaper, är elevers svårigheter med bråk i årskurs tre värt att undersöka.

3. Syfte

Syftet med den här undersökningen är att via en formativ bedömning ta reda på vilka svårigheter som kan uppstå för elever i årskurs tre med tal i bråkform. Jag vill se om det stämmer överens med tidigare forskning, där eleverna har problem med aspekten bråk som tal. Vidare syftar undersökningen till att ta reda på vad eleverna upplever som svårt inom bråk och hur eleverna använder sina bråkkunskaper i sin vardag.

3.1 Frågeställningar

För att studien ska kunna besvara syftet följer tre frågor:

- Vilka svårigheter kan uppstå för eleverna inom de olika aspekterna av bråk?
- Vilken eller vilka aspekter av bråk upplever eleverna som svårast och varför är de svårast?
- Hur använder eleverna egen kunskap om bråktal i sin vardag?

4. Metod

För att besvara min första fråga i frågeställningen har jag använt mig av en diagnos. Diagnosen är baserat på några uppgifter utifrån tre olika diagnoser från Diamantdiagnosen inom bråk. Uppgifterna är baserade på en del av en helhet, en del av ett antal och bråk som tal (Skolverket 2016b). Sammanlagt består diagnosen av nio uppgifter, det är tre uppgifter inom varje område/aspekt. Det är sex elever som har deltagit i studien. Först gjorde varje elev diagnosen själv under min uppsikt. Jag tog även ungefärliga tider på hur lång tid varje uppgift tog, anledningen till det var för att se om eleven fastnade på någon specifik uppgift.

För att stötta upp första frågan i frågeställningen och sedan besvara de andra två frågorna utfördes en intervju (Bilaga 3). Med hjälp av en ljudupptagning fick eleverna som utfört diagnosen svara på mina intervjufrågor. Intervjun var till för att eleven skulle förklara hur hen har tänkt och hur hen förstår bråk och om vilka svårigheter som eleven upplevde förekom i diagnosen. Intervjun gjordes enskilt med eleven. Anledningen till detta var dels för att deras svar på mina frågor inte skulle påverkas av någon annan och dels för att jag ville intervjua varje elev direkt efter diagnosen, då uppgifterna fanns färska i elevens huvud. Frågorna till eleverna har planerats utifrån uppgifterna i diagnosen och frågeställningen ovan.

4.1 Om Diamantdiagnosen (material)

Diamantdiagnos är ett material inom matematik som är utformat av Skolverket. Diagnosmaterialet är ett stöd för att genomföra bedömning av elevers matematikkunskaper. Tanken med diagnosen är att den ska kartlägga var eleverna befinner sig i sin matematikutveckling. Den utgår från Lgr11 och är till för elever upp till årskurs 9. Syftet med materialet är att diagnoserna ska fungera formativt, genom att läraren kan planera och strukturera sin individanpassade undervisning, så att eleverna ska nå kunskapskraven (Skolverket 2016a).

4.2 Urval av material

Utifrån frågeställningarna och syftet var det som metod lämpligt att ha ett diagnostest som visar på vilka svårigheter som förekommer. Intervjun är lämplig eftersom den förstärker det som testet visar, eftersom eleverna berättar med egna ord av vad de förstår och inte förstår. Intervjun ger på så vis eleverna möjlighet att sätta ord på sina svårigheter. Valet av att diagnosen skulle bestå av diamantdiagnosmaterialet var för att detta material är till för skolan och den knyter an till läroplanen. Valet av att göra en ljudupptagning var för att kunna prata och fokusera på eleverna istället för att anteckna och för att ha möjlighet att gå tillbaka och lyssna på inspelningen.

4.3 Urval av skola och deltagare

När metoden för undersökningen var klarlagd, övervägdes antalet elever. Valet blev att göra studien med sex elever, då det förväntade var att det antalet skulle räcka för att se en tendens om det som undersöks. Dock hade det varit bra att låta alla elever i klassen göra diagnosen, för att få en högre validitet och större möjlighet till generalisering. Tidsaspekten hade blivit ett problem med en undersökning med fler elever, då det är tidskrävande att bearbeta materialet. Anledningen till valet av årskurs tre, är för att kunskaper om bråk ska vara etablerade i klassen. Vid tidigare årskurser kanske de inte arbetat med bråk så mycket.

Jag mailade tio lärare från tre olika skolor (Bilaga 1). Om inte några svar hade erhållits, hade fler mail skickats ut till fler skolor. Till en början erhölls svar från två lärare, den ena sa att på grund av Nationella prov fanns det inga möjligheter till att komma. Den andra läraren hade också fullt upp med Nationella prov men hen ordnade så att studien kunde utföras på spridda tider. Urvalet av klass och skola blev på så vis ett enkelt val då inga andra möjligheter fanns. Dock kom ett sent svar från en annan lärare om att jag var hjärtligt välkommen, men då var min undersökning redan igång.

Vid mitt första besök gjorde jag ett urval av vilka elever som skulle delta. För att välja de sex eleverna slumpvis så drog jag glasspinnar med deras namn på. Eleverna fick svara "ja" eller "nej" till att delta i undersökningen, några elever sa "ja" men andra sa "nej". I och med att en del sa ”nej” kanske jag inte kom åt de elever som har de största svårigheterna, eftersom de troligtvis sa ”nej”. Om jag hade utfört diagnosen med hela klassen hade jag kunnat avgöra om det fanns skillnader mellan ”ja” och ”nej” elever. Dock är undersökningen helt frivillig, så dessa elever kanske ändå inte hade velat delta. Jag valde även ut tre reserver om något barn skulle bli sjukt eller inte få delta av sina föräldrar. Att välja ut reserver var ett klokt drag då en reserv fick delta på grund av sjukdom.

4.4 Etiska överväganden

Vid första besöket informerade jag om vem jag var och vad jag gjorde där. Vidare berättade jag om studien och hur den skulle gå till. Därefter informerade jag eleverna om att jag behöver förälders och elevens medgivande för att de ska få delta. Jag talade också om vid flera tillfällen att även om de säger "ja" till att delta så skulle de kunna ändra sig när som helst. Vidare informerade jag eleverna om att jag inte kommer att avslöja deras riktiga namn eller vilken skola de går på. Dessutom talade jag om för eleverna att jag ville använda mig av ljudinspelning och att ingen annan än jag själv, kommer att lyssna på inspelningen.
Jag har tagit del av de forskningsetiska principer som vetenskapsrådet (2002) upplyser om. Dessa principer är informationskravet, samtyckeskravet, konfidentialitetskravet och nyttjandekravet.

Den första introduktionen av undersökningen innehåller kravet av information och samtycke i och med att jag berättade för eleverna om min undersökning och vad jag ska använda den till. Vidare var jag tydlig med att tala om att de när som helst kan ändra sig och inte delta och att allt sker frivilligt. Sedan fick de svara "ja" eller "nej" utan yttre påtryckningar.

Monica Dalen (2015, s. 28) i boken *Intervju som metod* menar att forskningspersoner under 18 år ska informeras och samtycka till forskningen, men att även vårdnadshavare ska informeras och samtycka.

När urvalet var gjort så delade jag ut lappar till de berörda eleverna om förälders medgivande (Bilaga 2). Jag valde att bara ha en rad för namnteckning på medgivandeblanketten, då det kan förekomma komplikationer vid hem där föräldrar är skilda. Detta val kanske inte är helt etiskt korrekt, men risken för att inte få tillbaka lapparna i tid för undersökningen bidrog till detta val. Fem av de sex lapparna återkom i god tid för min undersökning, den sista lappen återfick jag inte, men föräldern gav sitt medgivande via mail till läraren. För övrigt har jag följt de etiska direktiven om informationskravet, samtyckeskravet och nyttjandekravet. Jag anser att föräldrarna har fått ta del av alla dessa krav i form av medgivandeblanketten. Eleverna i sin tur har fått information om alla delar utom nyttjandekravet. Anledningen till att jag inte belyste eleverna om nyttjandekravet var för att inte skapa oro inför undersökningen. För ett barn kan de låta otäckt om man berättar för mycket om sådant som inte barnet förstår. Jag har även informerat alla inblandade parter om konfidentialitet och i och med detta krav är alla namn på eleverna i min undersökning anonymiserade.

4.5 Reliabilitet, validitet och generaliserbarhet

Enligt Staffan Stukát (2011, s. 133) i boken *Att skriva examensarbete inom utbildningsvetenskap* innebär reliabilitet mätnoggrannhet och tillförlitlighet, det vill säga hur skarpt mätverktyget är för att mäta det som är avsätt att mätas. Diagnosen ger ett bra underlag för att analysera det som undersöks och intervjuerna förstärker diagnosen i hur eleverna tänker. Dock kan mätinstrumentet ha sina brister, då elevernas svar i diagnosen skulle kunna variera efter elevernas dagsform. För att få en högre reliabilitet skulle eleverna kunna göra om diagnosen, vid flera olika tillfällen. Gör man om samma test flera gånger kommer dagsformen inte vara lika avgörande för resultatet. Det som förstärker reliabiliteten i den här undersökningen är att intervjun är gjord enskilt och direkt efter eleven har utfört testet. Eleverna påverkar på så vis inte varandra och de minns hur de tänkte då diagnosen utfördes i närtid. Vidare kan min närvaro påverka eleverna vid utförande av diagnosen. Stress och orolighet av att göra fel kan påverka eleven negativt, när eleven gör diagnosen. Ljudinspelningen gör att reliabiliteten blir bättre då man som undersökare slipper att gissa vad eleven sagt, om man missat något. Vid analysering av denna undersökning har jag lyssnat på inspelningen om och om igen, för att inte missa detaljer som är viktiga för analysen. Dock påverkas intervjun av min egen tolkning.

Validitet är giltigheten i undersökningen, med det menas om man mätt det som är avsikten att mätas (Stukát 2011, s.133). Det som stärker validiteten i den här undersökningen är diagnosen som kommer från Skolverket. Med hjälp av diagnosen mäts det som eleverna gör fel på. Dock behöver det inte betyda att göra fel är samma sak som att det är något eleven har svårigheter med. Att mäta elevers svårigheter kan vara lite svårt, men med hjälp av intervjun stärks validiteten, då även eleverna kan berätta om vad de tycker är svårt. För att stärka validiteten har jag genom hela arbetet tittat tillbaka på mitt syfte och mina frågeställningar.

Generaliserbarhet innebär att kunna generalisera resultatet från undersökningen till en större grupp (Stukát 2011, s.136). Generaliserbarheten är näst intill obefintlig i den här undersökningen. Man kan inte generalisera direkt till en större grupp, men man skulle kunna göra diagnostestet i samma utformning som denna undersökning och göra med andra elever. Dock kan det vara så att resultatet ändå inte blir detsamma då den mänskliga faktorn, så som tolkningar avgör hur man analyserar materialet. Dessutom blir intervjuer med eleverna helt olika om någon annan utför intervjun. I den här undersökningen är det ett urval av sex elever som deltagit. Sex elever är ett för litet urval för att kunna generalisera till en större grupp elever. Om jag hade utfört diagnosen med fler elever hade generaliserbarheten ökat. Dock bidrar undersökningen till vetenskapen genom att det intressanta resultatet kan föda nya idéer om undersökningar av samma slag.

5. Teoretisk ram

I detta avsnitt kommer jag först att presentera teori för formativ bedömning som ligger till grund för min undersökning i form av Skolverkets Diamantdiagnos. Sedan presenteras variationsteorin som är viktig för att genom en varierad undervisning kunna ge elever bättre förutsättningar för att förstå bråk. Därefter följer teori om taluppfattning, eftersom att det ofta är en bristande taluppfattning som ligger till grund för svårigheterna när det gäller bråkbegreppet. Vidare följer ett kort avsnitt om nämnare och täljares innebörd eftersom dessa egenskaper är avgörande inom bråk. Sist förklaras de tre olika områdena som arbetet handlar om, som är en del av en hel, en del av ett antal och bråk som tal.

5.1 Formativ bedömning

Skolverkets (2014) definition av formativ bedömning är att det kan utifrån lärande för både lärare och elever betraktas som ett redskap. Den strävan man har med den formativa bedömningen är att få ett klassrumsklimat där lärandekulturen är sådan att elever både vill och får möjlighet till att lära sig. Det är viktigt för elevernas självkänsla att bedömningen stärker elevernas motivation och deras egen självbild i stället för att döma eller fördöma. I en formativ bedömningsprocess är det viktigt att klargöra målen för undervisningen och att söka information om var eleven befinner sig och att ge återkoppling till hur eleven kan komma vidare för att uppnå målen. Diamatdiagnosen kan då vara ett bra redskap för att bedöma var eleven befinner sig.

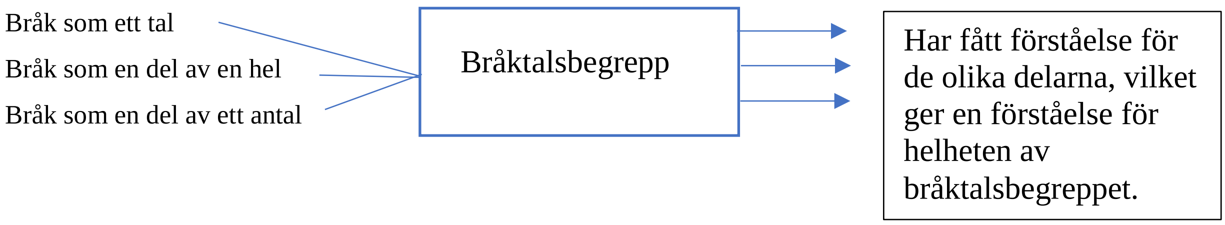
Dylan William och Leahy, Siobhán (2015, s. 17) i boken *Handbok i formativ bedömning* menar att det förekommer oenighet i vad en formativ bedömning är. Var drar man gränsen för en summativ och en formativ bedömning? Kym Fry (2011) i tidskriften *Formative Assessment Tools for Inquiry Mathematics* skriver: ” Assessment can inform in two ways, symmatively and formatively. When evidence is used to adapt the teaching to meet student needs it becomes formative assessment.” (ibid, s. 271). Med det menas att bedömning kan göras på två sätt, genom summativ eller formativ bedömning. När läraren genom bedömningen möter elevens behov blir bedömningen formativ. William och Siobhán (2015, s. 18) menar att det som avgör om bedömningen är formativ eller summativ är hur informationen används efter till exempel ett prov. Om läraren använder informationen som grund till att ”forma” undervisningen och föra lärandet framåt så är bedömningen formativ. Men om bedömningen tvärtom bara är en poängsättning som ska betygsättas är provet summativt. Som nämnts ovan är Diamantdiagnosen till för att användas som en kartläggning av var eleverna befinner sig i sin matematikutveckling. Diagnosen fungerar som ett underlag för planering av kommande undervisning och bedömningen är då formativ (Skolverket 2016a).

5.2 Variationsteori

Enligt Lo Mun Ling (2014, s. 25) i boken *Variationsteori – för bättre undervisning och lärande* är det lärandeobjektet som står i fokus för lärande. Vidar menar Lo (2014) att lärandeobjektet i variationsteorin riktar sig mot början av lärandeprocessen istället för mot slutet av processen. Med andra ord är lärandeobjektet och lärandemål inte liktydiga med varandra. Det är viktigt att se till elevers förkunskaper och vilka svårigheter som kan uppkomma inför ett nytt lärandeobjekt och varför eleven ska lära sig detta. ”Värdet av att lära sig ett objekt ligger i om erfarenheten av lärandet kan hjälpa elever att få bättre förståelse för den värld de lever i” (ibid, s. 35).

För att få en förståelse för ett lärandeobjekt måste man förstå helheten i det som ska läras. Ference Marton och Shirley Booth (2000, s. 118) i boken *Om lärande* menar att delarna och helheten hör ihop och att man inte endast kan förstå delen till fullo om man inte kan se delen i sin helhet. Vidare menar Marton och Booth (2000, s. 64-66) att det finns olika dimensioner för lärande. Till exempel kan en elev vid lärande lära sig på ytan eller på djupet. Djupinriktat lärande är en inlärning där eleven skapar en förståelse för objektet, medan lärande på ytan är mer av en utantill inlärning. Sättet att lära sig på påverkar på så vis elevens kunnande och användande av lärandeobjektet. Vid en djupinlärning förstår eleven lärandeobjektet och kan på så vis relatera och använda objektet i andra situationer. Vid en ytlig utantill inlärning kan eleven återge sitt kunnande genom att komma ihåg, men förståelsen kanske inte finns för objektet har inte fått en egen mening. En varierad undervisning är positiv då elever har olika förkunskaper och lär sig på olika sätt. Marton och Booth (2000, s. 143) menar att man kan erfara samma sak genom olika sätt att erfara.

Här nedan finns min modell som är tolkad efter Martons och Booths (2000) definition av variationsteorin. Så här kan det se ut när man använder variationsteorin inom det området som jag undersöker. Man bryter ner begreppen i mindre delar. Varje del processas separat för att få förståelse för delen. När alla delar är processade, hjälper delarna varandra till att förstå helheten.



5.3 Taluppfattning inom bråk

Löwing (2008) menar för att elever ska förstå bråk och kunna operera (räkna) med bråk behöver eleven behärska tre grundläggande begrepp. Det är nämnarens och täljarens innebörd och att ”varje tal i bråkform kan skrivas på oändligt många olika sätt” (ibid, s. 254). Karlsson och Kilborn (2015, s. 94) menar att bråk, precis som procent behöver relatera till något, för att veta hur stort något är. Till exempel säger inte $\frac{1}{4}$ något om storleken som man tagit andelen av.

Löwing (2008, s. 256) menar att bråk kan uttryckas på olika sätt, men ändå ha samma ”värde”. Alla bråk kan förlängas, till exempel är $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10}$. Alla dessa bråk betyder precis samma sak och man kan fortsätta hur långt som helst. Vidare menar Löwing (2008, s. 256) att man har användning av förlängning av bråk när man räknar addition och subtraktion inom bråk. För att räkna addition och subtraktion med bråk måste nämnarna på respektive tal vara samma.

5.4 Nämnare och Täljares innebörd

Grundläggande kunskaper för att förstå bråk är nämnares och täljares innebörd. McIntosh (2009, s. 29) menar att nämnaren visar hur många delar som den hela delats i och täljaren visar delarna utifrån helheten. Vidare menar McIntosh (2009, s. 29) att delarna ska vara lika stora om det ska kallas bråkdelar, dock behöver inte delarna ha samma form.

5.5 Bråk som del av en helhet

Karlsson & Kilborn (2015, s. 93-94) menar att man från en helhet delar upp helheten i delar. Uppdelningen ska bestå av lika stora delar. Det är viktigt att se sambandet att till exempel $\frac{2}{3}$ är samma sak som $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ eller $2 \cdot \frac{1}{3}$. Om eleven har insikt om hur bråken hänger samman kommer det att lösa många problem senare. Vidare menar Karlsson och Kilborn (2015, s. 93-94) att det krävs variation av uppgifter och figurer för att säkerställa elevens uppfattningar om en del av en helhet och begreppet bråk.

5.6 Bråk som del av ett antal

Karlsson och Kilborn (2015, s. 95-96) menar att vid bråk som del av ett antal är principen om likadelning viktigt även här. Man har ett antal av något som man kan dela upp i lika stora grupper. Andelen av ett antal är nära förknippat med division och Löwing (2008, s. 251) menar att bråk som ett antal skiljer sig från bråk som en del av en helhet. När man till exempel ska ta $\frac{2}{5}$ av 15 kulor så måste man se ett mönster av dessa 15 kulor. Eftersom man ska ta $\frac{2}{5}$ så delar man först upp 15 kulor i femtedelar, vilket man gör genom divisionen 15/5 = 3, varje del är 3 kulor. Alltså är $\frac{2}{5}$ av 15 kulor = 6 kulor (3+3, eftersom det är $\frac{2}{5}$).

5.7 Bråk som tal

Löwing (2008, s. 250) tar utgångspunkt ifrån rationella tal och menar att alla bråk kan storleksordnas. Varje bråk har sin plats på tallinjen.

5.8 Teorisammanfattning

Genom att jag använder mig av ett formativt bedömningssätt som Diamantdiagnosen, har jag valt att använda formativ bedömning i det här avsnittet. Den formativa bedömning används som ett redskap för att kartlägga var eleverna befinner sig (Skolverket 2014). Vidare följer variationsteorin som handlar om lärande och är till för att ge elever redskap för att nå fram till kunskap. Kunskapen nås genom att bryta ner lärandeobjektet i mindre delar, för att ge en förståelse till helheten. Sedan presenterade jag ett avsnitt om taluppfattning inom bråk och en följd av under rubriker som var viktiga i min undersökning. Det var Nämnare och täljares innebörd, bråk som del av en hel, bråk som del av ett antal och bråk som tal.

6. Tidigare forskning

I det här avsnittet kommer jag att referera till tre olika forskare eller forskningsgrupper. Den första forskningen som presenteras nedan är inte en studie, med ett resultat av något. Det är tre forskare som tillsammans skrivit en bok, dock har de med all säkerhet gjort undersökningar inom området tidigare. De andra två forskarna som presenters därefter, har gjort varsin studie inom ämnet bråk. Både boken och studierna handlar om svårigheter med bråk och bråk som tal.

6.1 Bok skriven av forskare från USA

Som jag nämnt tidigare arbetar skolan idag mest med del av en helhet och en del av ett antal inom bråk. Forskarna Jeremy Kilpatrick, Jane Swafford och Bradford Findell (2001, s. 6-7) i boken *Adding it up* menar att arbete med rationella tal är en stor utmaning eftersom de kan presenteras på olika sätt, till exempel i bråkform och decimalform. Detta skulle kunna tolkas som att även bråkens olika aspekter kan skapa förvillelse hos elever, då bråken kan presenteras på oändligt många olika sätt. Vidare menar de tre forskarna (2001, s. 6-7) att elever har informella kunskaper om att göra uppdelningar. Små barn klarar att dela upp saker rättvist och dessa kunskaper är bra för att förstå hur man delar mängder i lika delar. Genom delning kan elever förstå de rationella talen på samma sätt som man räknar när det gäller hela tal. I och med att eleverna klarar delning så kan det ge en förståelse till varför skolor i Sverige arbetar med bråk som en del av en helhet och en del av ett antal. Men det finns mycket att vinna på genom att arbeta med bråk som tal. När man arbetar med bråk som tal, är tallinjen ett viktigt redskap.

Enligt Kilpatrick, Swafford och Findell (2001, s. 93) är användandet av tallinjen ett sätt att kunna se sambandet mellan addition och multiplikation med tal i bråkform. Vidare är tallinjen och bråk som tal som en länk mellan nummer, geometri och algebra. Man kan alltså säga att arbeta med bråk som tal har stor vikt i den mer avancerade matematiken i högre åldrar. Med den här boken vill jag visa hur viktigt det är med bråk. Dessutom att bråk som tal är extra viktigt för att förstå en mer avancerad matematik. Vidare ges en inblick i att bråk som tal kan uppfattas som svårare än delning, eftersom att delning kommer mer naturligt för barnen.

6.2 En omfattande longitudinell studie från Finland

I Finland utfördes en studie av Markku S. Hannula (2003) med titeln *Locating fraction on a number line*. Studien var en omfattande studie som innehöll både en kvalitativ och kvantitativ del. Studien utfördes i årskurserna 5-6 och 7-8. Studien var en longitudinell studie som varade i två år. Det var sammanlagt 3067 elever som deltog i den kvantitativa studien och 97 av dessa elever från årskurs 7 plockades ut för en kvalitativ studie. Den första frågan var ett rektangulärt block indelat på 8 rutor i rad. Eleverna skulle skugga $\frac{3}{4}$. Resultatet av rätt svar var 46 % i årskurs 5 och 86 % i årskurs 7. Sedan skulle eleverna markera $\frac{3}{4}$ på en tallinje. Det var endast 20 % som klarade det i årskurs 5 och 50 % i årskurs 7. Hannula (2003) menar att i Finland införs arbetet med tallinjen i olika årskurser, dessutom är det inte alla skolor som arbetar med tallinjen över huvud taget. Den här studien är viktig i mitt arbete, då den visar att svårigheter med bråkbegreppet finns och speciellt med området bråk som tal. Det var 50 % av eleverna i årskurs 7 som klarar att pricka ut $\frac{3}{4}$ på en tallinje i denna studie. I min studie kommer eleverna att pricka ut $\frac{1}{2}$ och $\frac{1}{4}$ på en tallinje och det resultatet kan sedan jämföras med den här studien. I studien får man också reda på att vissa skolor inte arbetar med tallinjen över huvud taget. Inför min egen studie är det även intressant att se om det kan vara så i Sverige också.

6.3 En studie från Nya Zeeland

I Nya Zeeland utfördes en studie av Judith Mills (2016) med titeln *Developing Conceptual Understanding of Fractions with Year Five and Six Students*. Eleverna i studien var i åldrarna 9-11 år, vilket motsvarar årskurs 4 och 5. Det var 21 elever som deltog i studien som handlade om att se elevernas progression inom bråk. Studien omfattar tre lektioner som observerades under sex veckor. Eleverna utförde ett test i början av studien och sedan ett test efter de sex veckorna. Varje test var uppdelad i sex delar. Det första testet visade att eleverna generellt låg betydligt under det förväntade och ingen del av resultatet i testet kom upp i 50 % av rätt svar. En ökning skedde i test nummer två med upp till 65 % i vissa delar av testet. Läraren hade då arbetat med en del av en hel och en del av ett antal och de var dessa delar man märkte en betydande förbättring. Det som är lite extra intressant i resultatet av studien är testdelen av bråk som tal. Eleverna skulle rangordna från lägst till störst av talen $\frac{1}{3}, \frac{6}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}$. Av de 21 elever som utförde första testet klarade endast en elev detta, vilket motsvarar 5 %. Efter de sex veckorna under test nummer två som utfördes av 20 elever klarade 2 elever av detta, vilket motsvarar 10 %. Jag valde att ta med denna studie då den är högaktuell, eftersom det är en ganska ny studie. Studien visar tydligt hur svårt det är med bråk och att bråk som tal verkar vara det absolut svåraste.

6.4 Forskningssammanfattning

De studier som presenterats ovan hänger alla ihop med bråk som tal. Enligt Kilpatrick, Swafford och Findell (2001, s. 93) så är bråk som tal och tallinjen viktigt för att förstå mer avancerad matematik. Det är en länk mellan nummer, geometri och algebra. De här forskarna tog jag med i min tidigare forskning, för att visa hur viktigt området bråk som tal är. Vidare har jag visat både en studie ifrån Finland och Nya Zeeland. I Finland kunde endast 50 % av elever i årskurs 7 pricka ut $\frac{3}{4}$ på en tallinje (Hannula 2003). Studien från Nya Zeeland visade att endast 5-10 % av elever i årskurs 4-5 kunde rangordna talen $\frac{1}{3}, \frac{6}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}$ från lägst till störst (Mills 2016). Genom dessa studier kan man se att det finns svårigheter med tallinjen och bråk som tal.

7. Resultat och analys

Anledningen till att resultat och analys är ihopsatta är för att det blir lättare att förstå analysen när resultatet finns nära tillhands. Först kommer ett avsnitt om hur materialet bearbetades för resultat och analys. Nästa del är ett resultat i form av en tabell där alla uppgifter i diagnosen är poängsatta. Sedan följer delar av elevintervjuerna som är intressant inför analysen. Därefter följer resultat och analys av varje uppgift, med stöd av elevintervjuerna. Vidare presenteras en analys som helhet av diagnosen.

7.1 Bearbetning av resultat och analys

Till en början var resultatet i den här undersökningen ett eget avsnitt. När sedan analysen påbörjades, blev det väldigt mycket återupprepningar, så utformningen ändrades. Det fanns en vinning med att slå ihop resultat och analys då man vid analysen behöver se uppgiftens utformning och vad eleverna gjort för fel. Det första som skedde i bearbetning av resultatet var att titta igenom diagnoserna och poängsätta uppgifterna, för att få en överblick av var felen uppstod. Sedan lyssnade jag på alla intervjuer och skrev ner stödord. Vid de tillfällen som var intressanta för analysen transkriberade jag de delarna av intervjuerna. Resultatet av diagnosen bearbetades med en fråga i taget. När analysen påbörjades fyllde jag på vid varje uppgift av resultatet. Vid analysen av varje uppgift blickade jag tillbaka till frågeställningarna och teorierna. När alla uppgifter var analyserade, så såg jag ett mönster av fel, inom de olika delarna av diagnosen. Det var på grund av den upptäckten som avsnittet analys som helhet av diagnosen bearbetades.

7.2 Resultat (tabell)

Tabellen nedan visar resultatet av diamantdiagnosens formativa test. Eftersom många uppgifter har flera deluppgifter i form av a), b) och c), så görs en poängräkning med tre poäng på varje uppgift, då vissa elever har gjort fel på endast en av de tre delarna. Vid hopräkning av alla elevers poäng kan varje uppgift generera 18 poäng och summan presenteras efter sista eleven. Dessutom räknas summan av delområdet ut nederst i tabellen och varje område kan generera 54 poäng.

Tabel 1: Resultat av diagnosen

	Bråk som del av en hel			**Bråk som del av ett antal**			**Bråk som tal**		
	Uppg. 1	Uppg. 2	Uppg. 3	Uppg. 4	Uppg. 5	Uppg. 6	Uppg. 7	Uppg. 8	Uppg. 9
Sigrid	3	2	1	2	2	3	3	3	3
Oskar	3	3	3	3	3	3	3	3	3
Josefine	3	3	3	3	3	3	3	3	3
Erika	3	0	1	3	3	3	3	1	3
Felicia	3	0	1	3	3	1	2	3	3
Kalle	3	3	2	3	3	3	3	2	3
Summa	**18**	**11**	**11**	**17**	**17**	**16**	**17**	**15**	**18**
Summa		**40**			**50**			**50**	

Som tidigare informerats om i etikdelen är att alla namnen av eleverna är anonymiserade. Resultatet av testet visar att området bråk som del av en hel är det område som eleverna svarade mest fel på. Det var då uppgift 2 och 3 som drog ner resultatet på den delen. Bråk som del av ett antal och bråk som ett tal genererade lika många poäng. Det behöver dock inte betyda att eleverna egentligen har svårare att förstå bråk som en del av en hel.

7.3 Elevintervju

I detta avsnitt har ett urval av intervjuerna sammanställts som en helhet. Intervjufrågorna presenteras i bilaga 3. Inom delområdet bråk som en del av en hel definierar samtliga elever att uppgifterna var lätta. Lättaste var uppgift 1, då eleverna menar att den redan är skuggad och det bara är att läsa av. På uppgift 2 gjorde bland annat Sigrid fel på uppgift c) och när hon förklarar hur hon tänkte lät det så här:

Sigrid	– och en tredjedel då är det tre bitar, och så finns det också en halv, det är en tredjedel.
Jag	– skugga en tredjedel, har du gjort det?
Sigrid	– alltså jag tänker ju (tystnad uppstår) **nej**, just det, en tredjedel, man ska dela upp det i tre olika bitar.
Jag	– Ja, för hur mycket har du skuggat här?
Sigrid	– Då har jag skuggat en halv.

Både Erika och Felicia säger att skuggningen blev fel i uppgift 2 för att de slarvläste. Erika var bland annat en av de elever som gjort fel på uppgift 3 c) och när hon förklarar det hon har gjort låter det så här:

Erika	- Jag räknade hur många delar det var, fast den här såg jag var mer än tre, eftersom (tystnad), ah...
Jag	- ser du något?
Erika	- hm (nickar)
Jag	- Berätta.
Erika	- Alltså en tredjedel av så här, vad heter det? en tredjedel av en sjättedel, eller en tredjedel av sex delar, är två delar av dem sex.
Jag	- Du menar att det här är två sjättedelar? (pekar på figur c).
Erika	- Ja, och två sjättedelar är samma sak som en tredjedel.

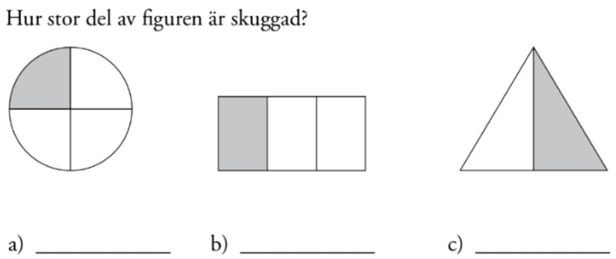
I det andra delområdet som var en del av ett antal tyckte samtliga elever att det var lika lätt som den första delen av testet. Eleverna menar att det är lätt att se bråktalet i de olika figurerna och prickarna. Däremot pekar samtliga elever ut området bråk som tal som det svåraste avsnittet. Sigrid berättar att även om hon klarade alla de tre uppgifterna så satte hon ut $\frac{1}{4}$ lite slumpmässigt på tallinjen i uppgift 7. På uppgift nio så ritade hon till hjälp, för hon såg helheten lite bättre då. Även Josefine menar att det var till stor hjälp att rita, men att alla de tre uppgifterna var svåra. Oskar tyckte att uppgift 7 var den absolut svåraste och Erika pekar ut uppgifterna 8 och 9. Kalle tyckte att uppgift 7 var jättelätt, men att uppgift 8 var den absolut svåraste uppgiften i testet. Felicia definierar också området bråk som tal som det svåraste. Vid genomgången av uppgifterna säger hon om uppgift 9 – först tänkte jag att det är helt andra tal, men sen så…(bryter ut i tystnad). Även om eleverna pekade ut de svåraste uppgifterna hade de svårt att sätta ord på varför de var svåra.

I fråga om att koppla vardagen till begreppet bråk, svarar hälften att de använder vardagliga erfarenheter till hjälp att tänka inom bråk. De definierar att bakningserfarenheter kan vara till hjälp eller att dela upp saker lika mellan kompisar. Den andra hälften menar att det kan dyka upp i tanken ibland vid uppdelning av saker, eller att de inte tänker så mycket på bråk i vardagen.

7.4 Resultat och analys av uppgifterna

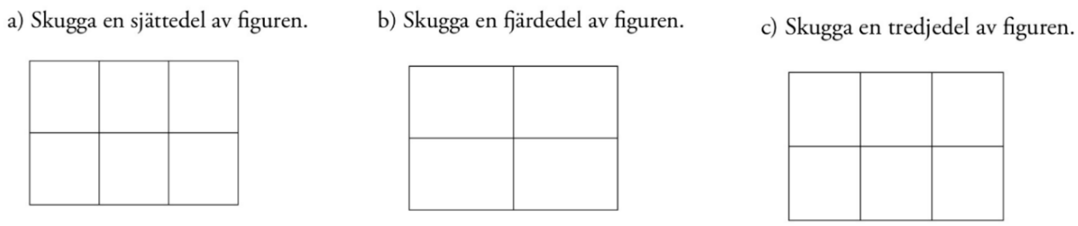
Resultatet och analysen av varje uppgift presenteras uppgiftsvis från uppgift 1 till 9.
Som grund för analysen använder jag mig av den formativa bedömningen, genom Diamantdiagnosen. Skolverket (2014) definierar formativ bedömning som ett redskap för lärare och elever. När man som lärare har gjort en kartläggning av hur eleverna ligger till, behöver man forma lektionerna för att ge eleverna de delar som de saknar eller brister i. I detta skede kommer variationsteorin in i bilden. Genom att läraren bryter ner begreppen i mindre delar och undervisar om dessa delar, bidrar delarna till att eleven förstår helheten (Marton & Booth 2000, s. 118). Man kan säga att variationsteorin blir en följd av den formativa bedömningen. Jag använder mig av dessa två teorier, för att förstå vad som ligger tillgrund för elevernas resultat. Jag använder mig dessutom av Diamantdiagnosens kommentarer som finns till varje diagnos. Diagnoserna som har använts är RB1, RB3 och RB4 (Skolverket 2016b).

Uppgift 1



Rätt svar är a) $\frac{1}{4}$, b) $\frac{1}{3}$, c) $\frac{1}{2}$. Samtliga elever hade rätt på de tre figurerna, dock var både Felicia och Kalle osäkra på hur man skulle skriva $\frac{1}{4}$ (som var första uppgiften) och jag fick hjälpa Felicia lite, så att hon kom igång. Felicia sa: - Hur skrev man en fjärdedel nu igen, det var så länge sedan? Kalle sa ungefär samma sak men han tittade sedan på övriga uppgifter och konstaterade hur man skrev $\frac{1}{4}$. Marton och Booth (2000, s. 64-66) i variationsteorin menar att det finns olika dimensioner för lärande, det är att lära sig på ytan (utantill inlärning) eller på djupet (förståelse). Det kan vara så att de två eleverna som inte direkt kunde skriva bråk med siffror och bråkstreck har lärt sig bråkets utseende utantill. De har på så vis inte skapat sig någon större förståelse av vad nämnare och täljare innebär. Dock kunde Kalle se helheten av bråk, då han kunde söka sig till hur man skriver $\frac{1}{4}$, genom att förstå att i diagnosen borde det finnas ett bråktal.

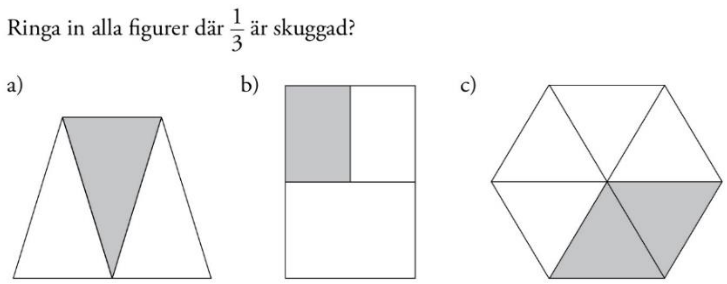
Uppgift 2



Rätt svar på a) och b) är att skugga en ruta och på c) skugga två rutor. Både Erika och Felicia skuggade samtliga rutor i figur a) och b), sedan på figur c) skuggade de tre rutor. Felicia skuggade de tre figurerna i närmare 2 minuter. Karlsson och Kilborn (2015, s. 93-94) menar att för att säkerställa elevers uppfattning av bland annat en del av en helhet krävs en variation av uppgifter. De två eleverna menade att de läste fel på uppgiften, detta skulle kunna tyda på att de inte mött den utformningen av uppgifter tidigare. Men samtidigt kan man se ett mönster av hur de skuggade figurerna. En sjättedel skuggades med sex rutor, en fjärdedel skuggades med fyra rutor och en tredjedel skuggades med tre rutor. Det kan vara så att de två eleverna tänker att till exempel en sjättedel är ett värde i sig och därför skuggar sex delar.

Sigrid hade gjort rätt på uppgift a) och b) och skuggat en ruta i varje figur. Det var figur c) som Sigrid hade fel på och hade skuggat tre rutor i stället för två precis som Erika och Felicia gjorde. I Sigrids fall kan det vara så att eftersom det var sex rutor som skulle skuggas med en tredjedel, så behöver hon förstå att en tredjedel är samma sak som två sjättedelar, eftersom det var sex rutor. Enligt Löwing (2008, s. 256) kan alla bråk förlängas och ”värdet” är ändå detsamma. Sigrid kanske inte har kunskap om hur man förlänger bråk, men hon skulle kunnat dela upp figuren i tre delar. Då ligger rutorna två och två, sedan kunde hon ha skuggat en tredjedel genom att skugga ett par (två) rutor, på så vis skulle hon kunna hon se att $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$. I intervjun om uppgiften säger hon: - och en tredjedel då är det tre bitar. Detta kan tyda på att även Sigrid inte ser delen av något, utan hon tänker att de tre delarna har ett värde i sig.

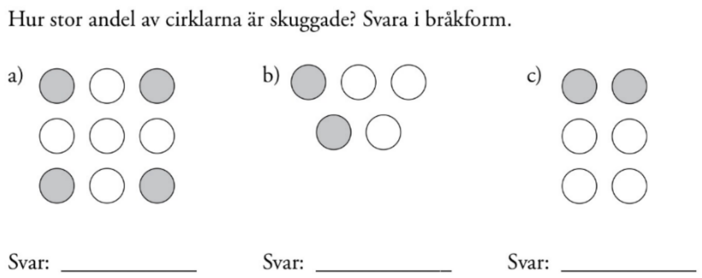
Uppgift 3



Rätt svar är a) och c). De tre elever som gjort fel har ringat in figurerna a) och b) som $\frac{1}{3}$ och inte c). Vid b) uppgiften var det mycket riktigt en del som var skuggad och det fanns endast tre delar. McIntosh (2009, s. 29) menar alla delar ska vara lika stora om det ska kallas bråkdelar. I detta fall indikerar det på att de tre eleverna inte hade full kontroll på att bråkdelarna måste vara lika stora. Kalle som var en av dem som löste uppgiften korrekt höll på att göra samma misstag som de tre som inte gjorde rätt. När han gjorde testet sa han: - Just det de ska vara lika stora delar.

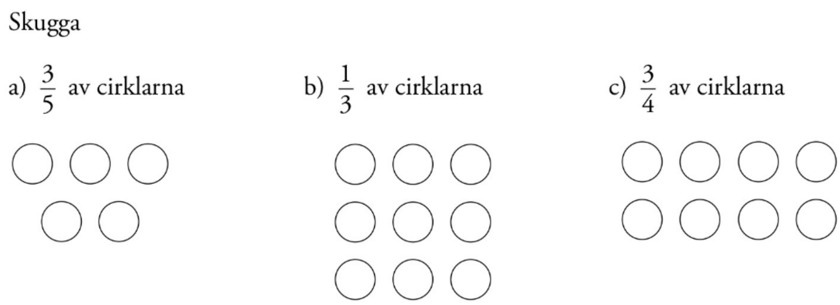
Vidare på uppgift 3 c) så var det fyra elever som inte såg att figuren var $\frac{1}{3}$, eftersom figuren var uppdelad i sex delar. Att eleverna inte ser att $\frac{2}{6}$ är samma sak som $\frac{1}{3}$ har med taluppfattningen och förlängning av tal att göra. Erika sa i intervjun: - Jag räknade hur många delar det var, fast den här såg jag var mer än tre. Med det kan man förstå att hon inte riktigt har koll på att förlänga tal. Likt med uppgift 2 så handlar det om att alla bråk kan förlängas, men att värdet ändå är detsamma (Löwing 2008, s. 256). Alla de tre tjejerna som gjorde fel på den liknande uppgiften 2 c) hade alla gjort fel här också.

Uppgift 4



Rätt svar är a) $\frac{4}{9}$, b) $\frac{2}{5}$, c) $\frac{1}{3}$ eller $\frac{2}{6}$. Sigrid gjorde rätt på uppgiften b) och c), men hon bytte plats på täljare och nämnare på uppgift a). Hon skrev $\frac{9}{4}$ i stället för $\frac{4}{9}$. Även om detta kan klassas som ett slarvfel, borde eleven se att $\frac{9}{4}$ är fler än hela summan. McIntosh (2009, s. 29) menar att grundläggande kunskaper för att förstå bråk är att förstå nämnarens och täljarens innebörd. Här har eleven inte helt full förståelse av nämnaren och täljarens innebörd, även om eleven själv menar att det var ett slarvfel. Alla andra elever hade gjort rätt på uppgiften. På uppgift c) finns det två svar som är korrekt, $\frac{1}{3}$ och $\frac{2}{6}$. Det var endast Josefine som svarat $\frac{1}{3}$ alla andra svarade $\frac{2}{6}$. Josefines svar indikerar på att hon har en god taluppfattning vad det gäller bråk, som ser att det går att bryta ner $\frac{2}{6}$ till $\frac{1}{3}$. Löwing (2008) menar att ”varje tal i bråkform kan skrivas på oändligt många olika sätt” (ibid, s. 254).

Uppgift 5



Rätt svar är a) skugga 3 ringar, b) skugga 3 ringar c) skugga 6 ringar. Sigrid gjorde rätt på uppgiften a) och b), däremot på uppgift c) skuggade Sigrid två ringar i stället för sex ringar. Det kan tyda på att hon såg fel och tänkte att hon skulle skugga $\frac{1}{4}$, annars finns det ingen logisk förklaring då hon skuggat två ringar. Om det skulle vara taluppfattningen som brister borde hon ha skuggat tre ringar, hon hade gjort uppdelningen korrekt, genom att dela upp cirklarna två och två. Felicia fastnade med denna uppgift och var även tvungen att fråga hur hon skulle göra vid uppgift b) och c). Efter en minimal vägledning lyckades hon på 2 minuter att lösa uppgiften korrekt. Åter igen kan man se att variation av uppgifter behövs för att säkerställa elevers uppfattning om bråk (Karlsson & Kilborn 2015, s. 93-94). Felicia hade inga problem med uppgift 4 som också var ringar, men när hon mötte nästan samma uppgift så blev hon osäker. Det kan vara så att hon inte mött den typen av uppgifter tidigare. Dessutom kan det vara svårare eftersom antalet ringar inte är lika stort som delarna som ska delas. Det hade till exempel varit lättare för Felicia att skugga $\frac{3}{9}$ i stället för $\frac{1}{3}$ på uppgift b), även om det betyder samma sak. Åter igen kan man se en tendens till att förlängning av bråk är svårt.

Uppgift 6

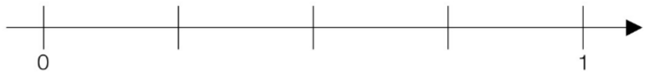
En pizza är delad i 6 bitar. Markus åt upp en tredjedel av pizzan.
Hur många bitar åt Markus?

Svar: ________________ bitar.

Svaret på uppgiften är 2 bitar: Erika och Sigrid ritade upp en pizza som stöd och delade upp pizzan i 6 bitar och kom på så vis fram till rätt svar. Dock skrev Sigrid $\frac{2}{6}$ i stället för 2 bitar, men i bedömningen fick hon full poäng i alla fall. Felicia ritade också som stöd, men hon ritade sex bollar och när hon sedan markerade $\frac{1}{3}$ av bollarna så skuggade hon 3 bollar och fick svaret 3 pizzabitar istället för 2. Felicia gjorde samma fel i uppgift 2 där hon skuggade tre rutor av sex rutor, när hon skulle skugga $\frac{1}{3}$. Det kan vara så att hon inte riktigt förstår vad en tredjedel är, när det står i textform i stället för i sifferform. Marton och Booth (2000, s. 118) menar att delarna och helheten hör ihop och att man inte endast kan förstå delen till fullo om man inte kan se delen i sin helhet. I det här fallet kan felet bero på att det inte har varit en tillräckligt varierad undervisning. De övriga tre eleverna som löst uppgiften på rätt sätt, räknade ut bitarna genom huvudräkning.

Uppgift 7

Sätt ett a vid talet $\frac{1}{2}$ på tallinjen och ett b vid talet $\frac{1}{4}$ på tallinjen.



Rätt svar är att pricka ut $\frac{1}{2}$ i mitten av 0 och 1, sedan $\frac{1}{4}$ mellan 0 och $\frac{1}{2}$. Det var endast Felicia som inte löste uppgiften korrekt. Felicia hade prickat ut $\frac{1}{2}$ mellan strecket $\frac{1}{4}$ och $\frac{1}{2}$ (i positionen som kan kallas $\frac{3}{8}$). Hon hade däremot prickat ut rätt position för $\frac{1}{4}$. Löwing (2008, s. 250) menar att varje bråk har sin plats på tallinjen. När Felicia försöker förklara hur hon tänkte, säger hon att hon tänkte på något sätt en och en halv och räknade sträcken en och en halv. Det som är lite konstigt är att hon placerade ut $\frac{1}{4}$ på rätt plats. Det kan vara att hon var osäker på hur man placerar ut bråk på en tallinjen. Sigrid som klarade uppgiften berättade att hon chansade på att sätta ut $\frac{1}{4}$.

Uppgift 8

Vilket av de två talen är störst?
Gör en ring omkring det största talet i varje par.

a) $\frac{1}{2}$ eller $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{7}$ eller $\frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{4}$ eller $\frac{3}{5}$

Rätt svar är a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{4}$. Erika gjorde fel på både uppgift b) och c) och hade alltså svarat $\frac{1}{7}$ och $\frac{3}{5}$. Dessutom frågade hon mig om vilken som var störst när hon började med uppgift a). Hon löste dock a) uppgiften själv utan min hjälp. Felicia gjorde fel på uppgift a) först men ändrade sig och suddade och löste alla uppgifter korrekt. Kalle gjorde fel på uppgift c) och ringade in $\frac{3}{5}$. Överlag så klarade eleverna den här uppgiften bra. Josefine och Felicia ritade till hjälp. Vid den här uppgiften behöver man förstå nämnaren och täljarens innebörd och se vad som är delen och vad som det är en del av. McIntosh (2009, s. 29) menar att nämnaren visar hur många delar som den hela delats i och täljaren visar delarna utifrån helheten. För att kunna avgöra vilken som är störst behöver man kunna detta. De elever som gjorde fel har inte helt full koll på nämnare och täljare.

Uppgift 9

Jämför de båda talen i uppgifterna.
Ringa in de uppgifter där båda talen är lika stora.

a) $\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$ c) $\frac{2}{3} = \frac{2}{4}$ d) $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$

Rätt svar är b) och d). Samtliga elever har gjort rätt på denna uppgift. Sigrid, Josefine, Erika och Felicia har alla tagit hjälp av att rita upp cirklar och delat in de olika delarna. När man ser denna uppgift kan man tolka det som att eleverna har en god taluppfattning och kan till viss del förlänga ett tal (Löwing 2008, s. 256). Att fyra elever ritade bilderna var säkert till stor hjälp också. Frågan är om eleverna hade klarat uppgiften utan att rita till hjälp. I intervjun sa Sigrid att när hon ritar till hjälp ser hon helheten bättre.

7.5 Analys som helhet av diagnosen

Två elever klarade hela diagnosen utan att göra fel. Tre elever har gjort fel på uppgifter där bråk är skrivet med bokstäver. Det är både på uppgift 2 och 6 där det bland annat var att läsa en tredjedel av något. Det verkar på så vis vara svårare att förstå bråk utifrån bokstäver till skillnad från när talet presenteras med siffror, som till exempel $\frac{1}{3}$. Att det blir svårare med att läsa av bokstäver i stället för siffror måste ha att göra med att eleverna inte stött på sådana uppgifter tillräckligt ofta. Enligt Karlsson och Kilborn (2015, s. 93-94) krävs det en variation av uppgifter och figurer för att säkerställa elevens uppfattningar om en del av en helhet och begreppet bråk.

Vidare var det uppgift 3 b) och c) som var utmärkande som svårt. Uppgiften b) där handlade det om att figurens delar inte är lika stora. McIntosh (2009, s. 29) menar att för att delaren ska få kallas bråkdelar måste delarna vara lika stora. Tre elever gjorde fel på den uppgiften och Kalle var på väg att göra samma fel. Eleverna trodde att figuren var en tredjedel fast det var en fjärdedel. Det kan vara en indikation på att eleverna inte riktigt har förstått att alla delar måste vara lika stora.

På uppgiften 3 c) var det fyra elever som gjorde fel. Den här uppgiften handlade om att pricka ut en tredjedel av en figur med sex delar. Uppgiften är ganska lik 2 c) där de skuggade en tredjedel av sex rutor. Tre av de elever som gjorde fel på 3 c) hade även gjort fel på 2 c). Här kan det för eleven också handla om att de inte är vana att figurerna innehåller fler rutor än den del de ska delas upp i. I de här uppgifterna måste eleven tänka delarna i par, för att det ska bli en tredjedel. Vidare handlar det om förlängning av talet $\frac{1}{3}$ som betyder samma sak som $\frac{2}{6}$ (Löwing 2008, s. 256). Även uppgift 5 skapade samma problem för en elev, dock lyckades hon lösa uppgiften.

Vidare förekom flera fel här och där, men det var dessa fel som var utmärkande och där flera elever gjort samma fel.

Även om uppgift 8 och 9 gav ett bra resultat i diagnosen finns det tveksamheter till att eleverna faktiskt klarar den typen av uppgifter. I båda uppgifterna finns talet $\frac{1}{2}$ med. Elever i årskurs tre har med all säkerhet bra koll på vad en halv innebär. På så vis kan delar av uppgifterna varit väldigt lätta och det har på så vis blivit ett skevt resultat. Dessutom ritade fyra av eleverna till hjälp och frågan är om de eleverna skulle klara uppgifterna utan att rita. När eleverna på så vis möter bråk, där de inte har möjlighet att rita till hjälp, behöver de kunna förlänga ett bråktal och dessutom när eleverna senare kommer att börja räkna med bråk så behöver de förstå hur man förlänger ett tal (Löwing 2008, s. 256) då kan eleven inte alltid rita till hjälp.

8. Diskussion

I det här avsnittet kommer jag först att diskutera allmänt kring de aspekter och tankar som den här undersökningen har gett mig insikt om. Vidare följer diskussionen till att besvara frågeställningarna som har en varsin huvudrubrik inom det här avsnittet. Därefter följer didaktiska implikationer.

Problemformuleringen som presenterades i bakgrunden var att dels bråk uppfattas som svårt och speciellt bråk som tal. Enligt forskning är bråk som tal en viktig del för en mer avancerad matematik (Kilpatrick, Swafford & Findell 2001, Löwing 2008, McIntosh 2009, Karlsson & Kilborn 2015). Jag ville undersöka området bråk som tal eftersom det var en sådan viktig del inom matematiken och att arbete med bråk som tal är lite bortglömt i skolan (Karlsson och Kilborn 2015, s. 92). Alla studier som jag hittat pekar åt samma håll. Studierna pekar på att det är bråk som tal som är problematisk och att eleverna brister i kunskaper inom det området. Min förväntning var att min undersökning skulle peka åt samma håll som den tidigare forskningen.

Jag hade en forskning från USA, Finland och Nya Zeeland. Forskningen från USA var en bok av forskare som inte hade ett resultat, men de påtalar att bråk som tal är mer abstrakt och är viktigt för att förstå algebra och geometri (Kilpatrick, Swafford & Findell 2001).

Nästa forskning från Finland var mycket intressant. Det fanns en uppgift där eleverna skulle skugga $\frac{3}{4}$ av ett rätblock med 8 rutor i rad. Resultatet av rätt svar i årskurs 5 var 46 % och årskurs 7 var det 86 % (Hannula 2003). Den uppgiften skulle man kunna likställa med uppgiften 5 c) i diagnosen som användes i den här undersökningen. Dock ligger mina cirklar inte på en rad, utan två rader om fyra i varje, så det kanske är något enklare att förhålla sig till. När cirklarna ligger som i par kan det vara lättare att dela upp cirklarna parvist. På den uppgiften var det fem elever som gjort rätt, det är ca 84 % av eleverna, vilket är väldigt nära eleverna i årskurs sju i Finland. Nästa uppgift som dessutom handlade om bråk som tal var att eleverna skulle markera ut $\frac{3}{4}$ på en tallinje. Av årskurs 5 var det 20 % som klarade det och 50 % i årskurs 7 (Hannula 2003). I min undersökning klarade alla elever att pricka ut $\frac{1}{4}$ på tallinjen och 84 % att pricka ut $\frac{1}{2}$ på samma tallinje. Dock kan det vara så att det blir lättare att pricka ut två tal, som kan hjälpa till att se förhållandet mellan varandra. Till skillnad mot Hannulas undersökning där bara $\frac{3}{4}$ prickas ut. Dessutom fortsatte den tallinjen ner på minustal, tillskillnad mot i min undersökning där eleven hade 0 och 1 att förhålla sig till. De här små skillnaderna mellan min diagnos och testet i Finland kan vara avgörande för resultatet.

I Studien från Nya Zeeland där de hade ett test före en sex veckors undervisning inom bråk, med elever i åldern 9-11 år. Testet inom olika delar, kom ingen del upp i mer än 50 % av rätt svar på uppgifterna (Mills 2016). Jämför man det som en helhet med min undersökning så blev det 86 % rätt svar på diagnosen. Vidare i studien från Nya Zeeland skulle eleverna rangordna bråktal från lägst till störst, vilket 5 % klarade vid första testet och 10 % vid det andra (Mills 2016). Nu fanns det ingen sådan uppgift i min undersökning, men om man slår ihop uppgift 8 och 9 som är liknande uppgifter som den i Nya Zeeland. Uppgift 8 och 9 handlade om att bedöma storleken på tal och att se likhet mellan olika bråk som har samma ”värde”. Resultatet blev nästan 92 % av rätt svar från min undersökning. Min undersökning ser inte ut att visa samma tendenser som tidigare forskning. Anledningen till det diskuteras vidare i avsnittet 8.5 Diagnosen genererade ett ganska bra resultat för överlag. Det var visserligen några elever som missade på flera uppgifter. Vad eleverna hade svårigheter med presenteras nedan.

8.1 Vilka svårigheter kan uppstå för eleverna inom de olika aspekterna av bråk?

Resultatet visar att det område där det uppstod mest svårigheter med i min undersökning var bråk som en del av en hel. Den sammanlagda poängställningen blev 40 poäng av 54 möjliga och det är 74 % av uppgifterna som blev rätt. Men uppgift 1 fick full poäng och ser man då till endast uppgift 2 och 3 blev det nästan 61 % av rätt svar. Som specificerades i avsnittet analys som helhet så var det mest problematiska att avläsa delarna utifrån en textform i stället för siffror. Vidare uppstod det problem med en av de grundläggande reglerna inom bråk, att alla delar måste vara lika stora (McIntosh 2009, s. 29). Ett annat problematiskt område var att se eller själv skugga delar av något som innehöll flera delar, till exempel tredjedelar som ska läsas av utifrån sex rutor.

Felen kan bero på att eleverna inte har sett uppgifterna i den formen förut. Som Karlsson och Kilborn (2015, s. 93-94) menar krävs en variation av uppgifter och figurer för att säkerställa elevens uppfattningar om bland annat begreppet bråk. I variationsteorin riktar sig lärandeprocessen mot början istället för mot slutet av processen (Lo 2014, s. 35). Vidare menar Lo (2014, s. 35) att det är viktigt att se till vilka svårigheter eleven har och vilken förförståelse som finns för lärandeobjektet. Om man ser till modellen som är ritad om variationsteorin så handlar det om att få förståelse, genom att bryta ner begrepp i mindre delar. Dessa delar leder till förståelse av begreppen och sedan kommer en förståelse av helheten. Det är den förståelsen för helheten som några av dessa elever kanske inte har även om de klarar vissa delar av diagnosen bra.

8.2 Vilken eller vilka aspekter av bråk upplever eleverna som svårast och varför är de svårast?

Den här frågan bekräftar tidigare forskning mer än vad resultatet av diagnosen gjorde. Intervjun med eleverna bekräftar att bråk som tal åtminstone uppfattas som svårt. Samtliga elever pekade ut uppgifter inom bråk som tal som de absolut svåraste. Det är lite fascinerande att eleverna upplevde bråk som tal som svårt då de klarade uppgifterna till nästan 93 %. I intervjun kunde inte eleverna riktigt svara på vad det var som kändes svårt, men de flesta sa att de fick koncentrera sig mer. En elev sa - först tänkte jag att det är helt andra tal, men sen så…(bryter ut i tystnad). Hon tystnar och kan inte förklara för mig hur hon tänker. Man kan tolka hennes ord ”men sen så” som att genom att titta på uppgiften en stund, så såg hon mönstret. Då är det åter koncentrationen som gör att eleven anstränger sig till att klara uppgiften. Vidare menade eleverna att uppgifterna bråk som del av en hel och del av ett antal var lätta, då det fanns figurer och former som gjorde det lätt att se. Då kan man tolka det som att bråk som tal var svårare, för att det inte var figurer och former som visar bråktalet.

Kan det vara så att bråk som tal ändå är svårast för de här eleverna, men eftersom de fick fokusera så mycket så kunde de klara det i alla fall. Vidare kan det även ha varit att eleverna ritade till hjälp, som gjorde att de klarade detta område med goda resultat. Några elever berättade i intervjun att rita är en stor hjälp, när bråk känns svårt.

8.3 Hur använder eleverna egen kunskap om bråktal i sin vardag?

När jag frågade eleverna om hur de använder bråktal i sin vardag, så var svaren vaga. Hälften menade att de använde sig av vardagserfarenheter som hjälp för att kunna tänka inom bråk. Eleverna talar om både bakning och att dela upp saker mellan varandra. Den andra hälften, säger att det kan dyka upp i tanken ibland och det är speciellt vid delning av saker mellan kompisar. Annars säger de att de inte tänker på bråk överhuvudtaget i vardagen. Tolkningen av elevernas svar kan vara att de har svårt att definiera när de faktiskt använder sina bråkkunskaper i vardagen. Det kan vara så att de använder sina kunskaper mer än de själva vet. Karlsson och Kilborn (2015, s. 94) menar att bråk, precis som procent behöver relatera till något, för att veta hur stort något är. Kan det vara så att dessa elever trots allt kan relatera till att 50 % är samma sak som $\frac{1}{2}$ och att 25 % är samma sak som $\frac{1}{4}$. I sådana fall kan de relatera till sina kunskaper i bråk när de till exempel handlar när det är rea, men de kanske inte vet om det.

8.4 Didaktiska implikationer

Det fanns några områden inom bråk som eleverna hade mer svårigheter för än andra områden. Ett problem var att utifrån bokstäver förstå ett bråktal. Sedan var problem med att förstå att varje del i ett bråktal måste vara lika stora (McIntosh 2009, s. 29). Den sista delen som min analys pekar ut som svårt är när till exempel elever ska pricka ut en tredjedel, där figuren till exempel är inrutad i sex delar. Alla dessa delar pekar på att eleverna inte riktigt förstår bråk fullt ut. Viktiga konsekvenser av min undersökning är att man får insikt om hur viktigt det är med en varierad undervisning och uppgifter (Karlsson och Kilborn 2015, s. 93-94). När svårigheter pekas ut på det som anses som ”lätt”, så kan det vara så att läraren har tagit för givet att eleven förstår. Genom min undersökning, får man insikt om hur viktigt det är att göra en formativ bedömning. En bedömning av hur eleverna ligger till i sina kunskaper, för att sedan forma undervisningen och föra lärandet framåt (William & Siobhán 2015, s. 18). Att genom variationsteorin bryta ner begrepp i mindre delar för att eleverna ska få möjlighet att förstå på djupet. Marton och Booth (2000, s. 118) menar att man inte endast kan förstå delen till fullo, om man inte kan se delen i sin helhet. Man kan titta på min modell som presenters i avsnittet variationsteori. Modellen visar att man bryter ner begreppen i mindre delar, för att skapa en förståelse för delen. När alla dessa smådelar är processade och eleven förstår delarna, då kommer eleven att förstå helheten. Om inte åtgärder vidtas, när elever har svårigheter inom bråk kan det skapa svårigheter för framtiden. Området bråk som tal kan anses som absolut viktigast för att eleven ska klara framtida matematik (Kilpatrick, Swafford & Findell 2001, Löwing 2008, McIntosh 2009, Karlsson & Kilborn 2015). Har då eleverna inte erhållit kunskap om bråk som tal så kommer de troligtvis få svårigheter att hänga med i undervisningen inom matematik i framtiden.

8.5 Varför går resultatet av diagnosen i motsatt riktning mot tidigare forskning?

Den här undersökningen är som tidigare sagt utförd med hjälp av endast sex elever. Dessa elever skulle kunna vara bland de duktigaste eleverna i sin klass. Dessutom kanske just denna klass har arbetat mycket med bråk tidigare. Det är inte säkert att samma resultat skulle nås i en annan klass. Det kanske inte ens skulle bli samma resultat med andra elever i samma klass.

En annan aspekt av resultatet kan också vara att det finns en brytpunkt inom bråk, där uppgifternas utformning förändras. I årskurs fyra börjar man till exempel att räkna med bråk och det är nog lättare att se bristerna inom bråk i högre årskurser än i årskurs tre. Att eleverna i min studie klarade diagnosen bra, tillskillnad mot tidigare forskning kan då bero på att min diagnos handlar mer om baskunskaper. I de tidigare forskningsresultaten har jag inte insikt i utformningen av alla uppgifter och de små skillnaderna kan göra att uppgifterna blir mer avancerade. Dessutom kan en stor del av resultatets skevhet ligga i uppgift 8 och 9, där fyra av eleverna har ritat till hjälp. Uppgifternas utformning och svårighetsgrad möjliggjorde för eleverna att rita till hjälp. Som tidigare sagts så kommer inte eleverna alltid att kunna rita till hjälp. Om man till exempel ser till uppgiften som fanns i studien från Nya Zeeland, där man skulle rangordna talen från lägst till störst, så blir det komplicerat att rita till hjälp. Mina sex elever har alltså kunnat använda sig av en strategi (rita) som kanske inte gick att använda sig av, vid de uppgifter som studierna från Finland och Nya Zeeland hade i sina test.

9. Slutsats

Min undersökning visar att de sex elever som utfört diagnosen möjligen har goda kunskaper inom bråk. Bråk som tal som är lite utmålat som det svåraste klarade dessa elever bra. Det var inom området bråk som del av en hel som genererade flest fel i diagnosen. Detta kan dock bero på att eleverna tycker att uppgifterna är lätta och att de vet att de kan, så de slarvar för de vill vara snabba. Det här är en väldigt liten undersökning med endast sex elever som själva har svarat ja till att delta. Mycket troligt är att de elever som inte är lika säkra inom bråk, inte ville delta i undersökningen. På så vis kan resultatet bli något skevt. Nästa aspekt av resultatet är om jag hade gjort undersökningen i en annan klass, hade resultatet blivit det samma? Jag fick endast ett svar om att det var okej att komma och göra min undersökning. Kan det vara så att andra lärare inte vill delta, då de vet att klassen inte kommer att generera ett bra resultat? Den här läraren visade mig hur de i klassen arbetar med bråk som tal. Därför var inte ämnet nytt för dessa elever. Om de inte hade arbetat med bråk som tal innan är det frågan om eleverna hade klarat den delen av diagnosen. En annan aspekt av bråk som tal är att många elever ritade till hjälp. Frågan är när nivån blir högre och de ska generalisera, kommer de att klara uppgifterna då? Eller är de beroende av att rita? Att rita till hjälp är ett begränsat hjälpmedel inom bråk, då vissa tal är svåra att rita. Elevernas uppfattning om vad som är svårast inom bråk var som tidigare forskning visar, att det är bråk som tal som är det svåraste. Att eleverna ändå fick ett bra resultat kan bero på att de ritade till hjälp och att de fokuserade för att klara uppgifterna. I och med att resultatet är något skevt (speciellt av uppgifterna 8 och 9) och att eleverna ändå säger att bråk som tal är det svåraste området, så är det säkerligen bråk som tal som är svårast.

10. Vidare forskning

Om jag hade fått göra om samma forskning hade jag velat ha ett större urval av elever och från fler skolor. Kanske fyra skolor med fyra elever i varje. Då hade man kanske sett ett mer varierat resultat mellan skolorna. På så vis är studien mer tillförlitlig än vid undersökningen av en skola är.

Vidare hade varit intressant att forska vidare i en årskurs 4 eller 5, jag hade gärna gjort en fortsatt undersökning med dessa sex elever. Då hade jag velat undersöka vidare i bråk som tal eller inom addition och subtraktion med bråktal.

En intressant studie skulle vara att se huruvida hjälpstrategier (som att rita) kan hjälpa eller stjälpa elever, när de lär sig bråk i tidig ålder.

11. Referenslista

Bergius, Berit (2011). *Bråk från början*. NCM.
Tillgänglig på Internet: http://ncm.gu.se/media/ncm/matematiklyftet/07A_bergius.pdf

Dalen, Monica (2015). *Intervju som metod*. 2., utök. uppl. Malmö: Gleerups utbildning.

Engström, Arne (1997) *Reflektivt tänkande i matematik: Om elevers konstruktioner av bråk*. Stockholm: Almqvist & Wisell International.

Fry, Kym (2011) Formative Assessment Tools for Inquiry Mathematics. *Mathematics: Traditions and [New] Practices.* AAMT & MERGA. [Elektronisk resurs]

Hannula, Markku S. (2003). Locating fraction on a number line. Publikation: Konferensbidrag: *A4 Artikel i konferenspublikation*. S. 17-24. Honolulu, Hawaii, Förenta Staterna (USA): 13/07/2003-18/07/2003.
Tillgänglig på internet: http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED500981.pdf

Karlsson, Natalia & Kilborn, Wiggo (2015). *Matematikdidaktik i praktiken: att undervisa i årskurs 1-6*. 1. uppl. Malmö: Gleerups Utbildning.

Kilborn, Wiggo (2014) *Om tal i bråk- och decimalform – en röd tråd*. Göteborg: NCM.
Tillgänglig på Internet: http://ncm.gu.se/media/ncm/dokument/brak_wiggo_kilborn.pdf

Kilpatrick, Jeremy, Swafford, Jane & Findell, Bradford (red.) (2001). *Adding it up: helping children learn mathematics.* Washington, D.C: National Academy Press.
Tillgänglig på Internet: https://download.nap.edu/cart/download.cgi?record_id=9822

Lo, Mun Ling (2014). *Variationsteori: för bättre undervisning och lärande*. 1. Uppl. Lund: Studentlitteratur.

Löwing, Madeleine (2008). *Grundläggande aritmetik: matematikdidaktik för lärare*. 1. uppl. Lund: Studentlitteratur.

Marton, Ference & Booth, Shirley (2000). *Om lärande*. Lund: Studentlitteratur.

McIntosh, Alistair (2009). *Förstå och använda tal: en handbok.* uppl. 1;4 Göteborg: Nationellt centrum för matematikundervisning (NCM), Göteborgs universitet.

Mills, Judith (2016). Developing Conceptual Understanding of Fractions with Year Five and Six Students I: (red) In White, B., Chinnappan, M. & Trenholm, S. (Eds.). *Opening up mathematics education research (Proceedings of the 39th annual conferance of the Mathematics Education Research Group of Australasia)*, pp. 479-486. Adelaide: MERGA. [Elektronisk resurs]

Skolverket (2014). *Formativ bedömning*. 2014-09-10 Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2016a) *Diamant - ett diagnosmaterial i matematik.* 2016-01-14 Stockholm: Skolverket.
Tillgänglig på internet: http://www.skolverket.se/bedomning/bedomning/bedomningsstod/matematik/diamant-1.196205

Skolverket (2016b). *Diamant - nationella diagnoser i matematik. Rationella tal. R* 2016-01-14: Skolverket.
Tillgänglig på internet: http://www.skolverket.se/polopoly_fs/1.193719!/2_Rationella_tal.pdf

Skolverket (2016c). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet* 2011: reviderad 2016. 3., kompletterade uppl. (2016). Stockholm: Skolverket.
Tillgängligt på internet: https://www.skolverket.se/om-skolverket/publikationer/visa-enskild-publikation?_xurl_=http%3A%2F%2Fwww5.skolverket.se%2Fwtpub%2Fws%2Fskolbok%2Fwpubext%2Ftrycksak%2FRecord%3Fk%3D2575

Stukát, Staffan (2011). *Att skriva examensarbete inom utbildningsvetenskap*. 2:2. Uppl. Lund: Studentlitteratur.

Vetenskapsrådet (2002). *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning*. Stockholm: Vetenskapsrådet.

Tillgänglig på Internet:
http://www.gu.se/digitalAssets/1268/1268494_forskningsetiska_principer_2002.pdf

Wiliam, Dylan & Leahy, Siobhán (2015). *Handbok i formativ bedömning: strategier och praktiska tekniker*. 1. utg. Stockholm: Natur & kultur.

11.1 Otryckta källor

Sigrid: Intervju.	2017-03-13
Oskar: Intervju.	2017-03-13
Josefine: Intervju.	2017-03-13
Erika: Intervju	2017-03-16
Felicia: Intervju	2017-03-16
Kalle: Intervju	2017-03-17

Bilaga 1

Hej!

Mitt namn är Xxxx och jag går på grundlärarutbildningen F-3 på Södertörns högskola. Jag går nu sjunde terminen och ska skriva mitt första självständiga arbete.

Jag skulle vilja komma och göra en studie i en årskurs 3.

Studien handlar om ämnet matematik och begreppet bråk. Jag vill ta reda på om det finns svårigheter för elever inom tal i bråkform. Jag skulle vilja göra ett test med 4-6 elever, med hjälp av några frågor från Diamantdiagnosen. Sedan skulle jag vilja intervjua dessa elever, för att få insikt om vilka svårigheter eleverna har och hur de tänker.

Det skulle vara bra att komma någon dag mellan den 14/3 till den 21/3 (ju tidigare desto bättre). För att vårdnadshavare ska kunna ge sitt samtycke till att eleverna får delta i studien, skulle jag behöva komma några dagar tidigare för att skicka med lappar hem till föräldrarna.

Jag har mailat till fler lärare på den skola du arbetar på och även till några lärare på andra skolor. Jag hoppas att någon av er lärare har möjlighet att hjälpa mig med detta.
Du kan nå mig på mail eller telefon.

Med vänliga hälsningar

Xxxx
Lärarstudent
Södertörns högskola

Mail: xxx@xxx
Tel: xxxx

Bilaga 2

Medgivande till att ditt/ert barn får delta i min studie Namn: ....

Hej!

Mitt namn är Xxxx Xxxx och jag går på grundlärarutbildningen F-3 på Södertörns högskola. Jag går nu sjunde terminen och ska skriva mitt första självständiga arbete.

Jag ska göra en studie som handlar om ämnet matematik och begreppet bråk. Jag vill ta reda på om det finns svårigheter för elever inom tal i bråkform. Jag tror att studien kan bidra med ny kunskap inför framtidens matematiklektioner inom begreppet bråk. Eleverna kommer att få lösa några uppgifter inom bråk och sedan medföljer en liten intervju som gör att jag kan få insikt om vilka svårigheter eleverna har och hur de tänker.
Jag skulle dessutom vilja använda mig av ljudinspelning av intervjuerna, för att kunna gå tillbaka och lyssna på vad eleven sagt.

Ditt/ert barn har valts ut slumpvist och har själv godkänt att delta i studien. Eleven kan när som helst ändra sig och välja att inte delta.
Jag kommer att behandla uppgifterna konfidentiellt (etiska aspekter bejakas), med det menar jag att inga namn på elever eller skolan kommer att finnas i mitt självständiga arbete och om det finns namn kommer dessa att vara påhittade.

Det är endast jag som kommer att lyssna på ljudinspelningen och ta del av materialet som eleverna bidrar med. Materialet kommer att låsas in på säker plats och när arbetet är över kommer jag att radera alla intervjuer och destruera alla papper.
Dessa uppgifter som jag samlar på mig kommer inte att användas på annat sätt än till mitt självständiga arbete.

Om ditt/ert barn får vara med i studien (vilket jag hoppas) så behöver jag enligt etiska riktlinjer ha ett medgivande på att ditt/ert barn får delta. Har ni några frågor så kan ni ringa eller maila mig.

Förälders underskrift

....

Med vänliga hälsningar

Xxxx Xxxx
Lärarstudent
Södertörns högskola

Mail: xxx@xxx
Tel: xxxx

Intervjuguide

När eleven har gjort klart alla uppgifter följer en kort intervju med frågor. Det kommer att vara ungefär samma frågor till varje uppgift:

- Hur kom du fram till det "svaret"?
- Hur vet du det?
- Beskriv hur du tänker då?

Frågorna kommer att bli mer som en diskussion och svaren på frågorna kommer att föda nya frågor, när alla uppgifter är genomgångna kan jag avsluta med fler frågor:

- Är det någon uppgift som påminner om något i din vardag (ex bakning)?
- Kan du använda dig av dina kunskaper i bråk i vardagen?
- Var någon uppgift svårare/lättare än någon annan?
- Varför var den uppgiften svårare/lättare?
- Hur tycker du att det är att arbeta med matematik?
- Hur tycker du att det är att arbeta med bråk?